

XIV. Egzamin maturalny z matematyki

Poziom podstawowy

Opis zestawu zadań

Abiturienti przystępujący do egzaminu maturalnego z matematyki na poziomie podstawowym otrzymali zestaw 10 krótkich zadań otwartych badających rozumienie pojęć i umiejętność ich stosowania w prostych sytuacjach oraz zadań o charakterze problemowym, badających umiejętność zastosowania poznanej wiedzy. Wszystkie zadania badały elementarne umiejętności z matematyki, opisane zarówno w podstawie programowej, jak i standardach wymagań egzaminacyjnych. Zadania punktowane były po: 3 pkt. (zad. 1, 2, 3, 6), 4 pkt. (zad. 5, 7), 5 pkt. (zad. 4, 8, 9, 10), przy czym do zestawu zadań opracowany został szczegółowy schemat, według którego w każdym zadaniu punktowane były pojedyncze czynności, które zdający powinien wykonać rozwiązując to zadanie. W przypadku poprawnego rozwiązania inną metodą niż zaproponowana w kluczu, zdający mógł także otrzymać maksymalną liczbę punktów. Badane zadaniami umiejętności i pojedyncze czynności zdających zostały przedstawione w rozdziale *Analiza jakościowa zadań*.

Podstawowe wskaźniki opisujące osiągnięcia zdających

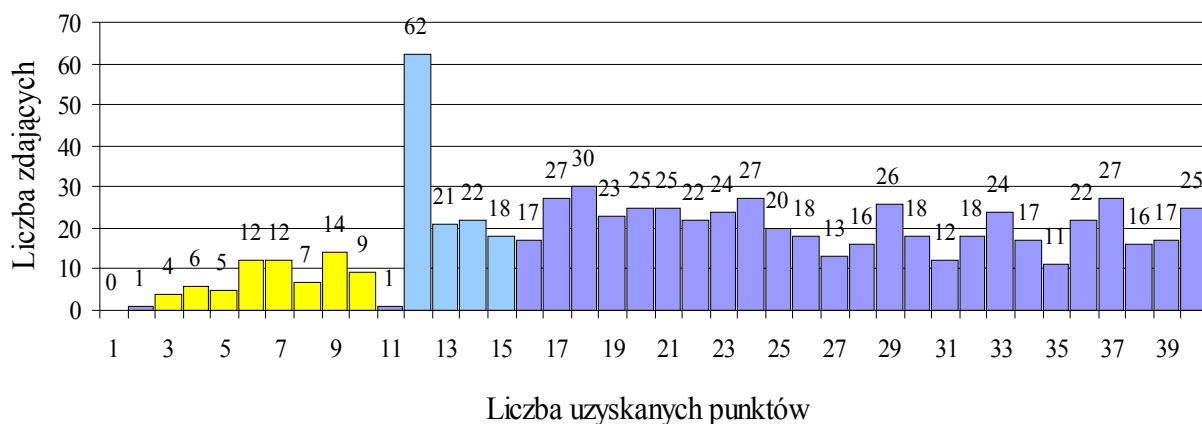
Tabela nr 1. Charakterystyka wyników osiągniętych przez zdających

Wskaźnik	Objaśnienie wskaźnika	Wartość	Komentarz
Liczba zdających		714	Wszyscy zdający maturę na nowych zasadach przystąpili do egzaminu z matematyki na poziomie podstawowym.
Łatwość zestawu zadań	Stosunek liczby punktów uzyskanych przez wszystkich zdających do maksymalnej liczby punktów możliwych do uzyskania na egzaminie	0,57	Zestaw zadań okazał się dla maturzystów województwa śląskiego umiarkowanie trudny.
Średnia arytmetyczna	Stosunek sumy uzyskanych punktów przez zdających do liczby zdających	22,89	Statystyczny maturzysta uzyskał 22,89 punktów na 40 możliwych do uzyskania. Oznacza to, że opanował 57,23% czynności sprawdzanych na egzaminie.
Mediana	Wynik środkowy, który dzieli zdających uporządkowanych rosnąco ze względu na sumę uzyskanych punktów na dwie równoliczne grupy	22	Środkowy zdający uzyskał 22 punkty, co stanowi 55% maksymalnej liczby punktów.

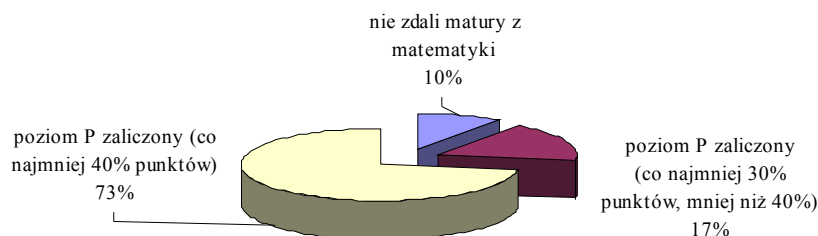
Modalna	Najczęściej powtarzający się wynik	12	Najczęstszy wynik to 12 punktów, jest to 30% liczby punktów możliwych do uzyskania. Równocześnie jest to minimalna liczba punktów warunkująca zdanie matury z matematyki na poziomie podstawowym.
Najwyższy wynik		40	Najwyższy wynik uzyskało 25 zdających, czyli 3,5% wszystkich zdających.
Najniższy wynik		2	Najniższy wynik uzyskał 1 zdający.
Rozstęp wyników	Różnica pomiędzy najwyższym a najniższym wynikiem – jedna z miar rozproszenia wyników	38	Zdający uzyskiwali wyniki w zakresie od 2 do 40 punktów.
Odchylenie standardowe	Miara rozproszenia wyników w odniesieniu do średniej	9,86	Przedziałem wyników typowych jest 14 – 32 punkty.

Rozkład uzyskanych punktów

Wykres nr 1. Rozkład punktów uzyskanych przez zdających



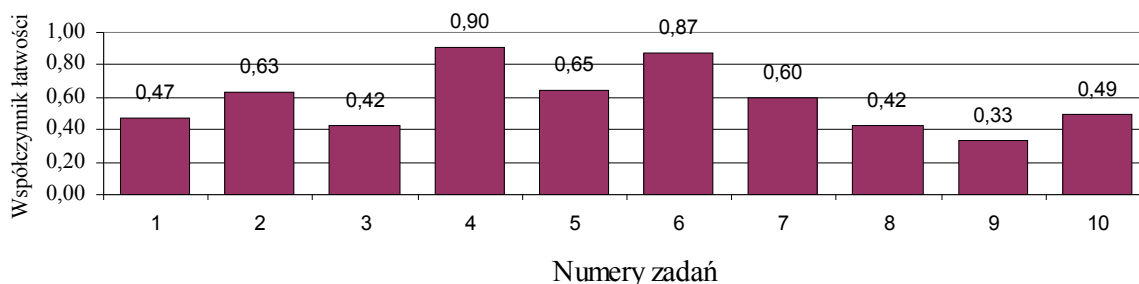
Wykres nr 2. Rozkład % zdających, którzy osiągnęli kolejne progi punktowe



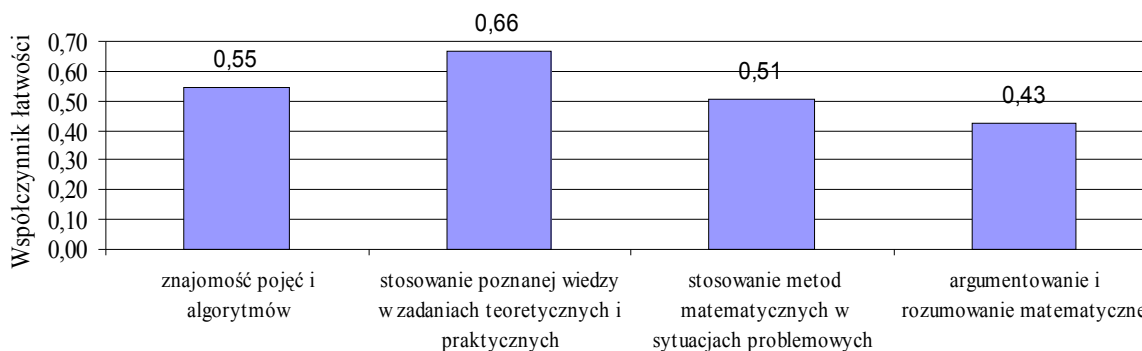
Przystąpienie do egzaminu maturalnego z matematyki na poziomie podstawowym jest obowiązkowe. Warunkiem zdania tego egzaminu jest uzyskanie co najmniej 30% punktów (I próg punktowy). Ci ze zdających, którzy przystępowali także do egzaminu z matematyki na poziomie rozszerzonym musieli na poziomie podstawowym osiągnąć co najmniej 40% punktów (II próg punktowy).

Łatwość zadań i standardów

Wykres nr 3. Łatwość zadań na poziomie podstawowym



Wykres nr 4. Łatwość czynności wg standardów wymagań



Wyniki zdających na skali staninowej

Do porównywania osiągnięć między zdającymi egzamin proponujemy zastosować dziewięciopunktową skalę staninową. Uporządkowane rosnąco wyniki dzielimy na dziewięć ponumerowanych grup – staninów: 1. stanin zawiera 4% wyników **najniższych**, 2. stanin – 7% wyników **bardzo niskich**, 3. stanin – 12 % wyników **niskich**, 4. stanin – 17% wyników **niżej średnich**, 5. stanin – 20% wyników **średnich**, 6. stanin – 17% wyników **wyżej średnich**, 7. stanin – 12% wyników **wysokich**, 8. stanin – 7% wyników **wysokich**, 9. stanin – 4% wyników **najwyższych**.

Tabela nr 2. Wyniki zdających na znormalizowanej skali staninowej

Nazwa stanina	Najniższy	Bardzo niski	Niski	Niżej średni	Średni	Wyżej średni	Wysoki	Bardzo wysoki	Najwyższy
Numer stanina	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Przedział punktowy	0 – 6	7 – 11	12 – 13	14 – 18	19 – 24	25 – 31	32 – 36	37 – 38	39 - 40
Teoretyczny % wyników	4%	7%	12%	17%	20%	17%	12%	7%	4%
Empiryczny % wyników	3,9%	6%	11,6%	15,97%	20,45%	17,23%	12,89%	6%	5,88%

Analiza jakościowa zadań

Zadanie 1

Tekst zadania 1 (3 pkt.)				
<p>Dana jest prosta l o równaniu $y = \frac{3}{2}x - \sqrt{2}$ oraz punkt $A = (-3, -2)$. Wykres funkcji liniowej f jest prostopadły do prostej l, punkt A należy do wykresu funkcji f.</p> <p>Wyznacz:</p> <ol style="list-style-type: none"> wzór funkcji f, miejsce zerowe funkcji f. 				
Umiejętności sprawdzane zadaniem:				
<ul style="list-style-type: none"> wyznaczanie równania prostej prostopadłej do danej i przechodzącej przez dany punkt, wyznaczanie miejsca zerowego funkcji liniowej. 				
Przykładowe rozwiązanie		Najczęściej powtarzające się błędy:		
<p>$\frac{3}{2} \cdot a = -1$ stąd $a = -\frac{2}{3}$, równanie prostej prostopadłej ma postać: $y = -\frac{2}{3}x + b$</p> <p>$A(-3, -2)$ należy do wykresu więc: $-2 = -\frac{2}{3} \cdot (-3) + b$, stąd $b = -4$.</p> <p>Zatem funkcja f ma postać: $y = -\frac{2}{3}x - 4$.</p> <p>$y = 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{3}x - 4 = 0$, czyli $x = -6$ jest miejscem zerowym funkcji.</p>		<ul style="list-style-type: none"> brak znajomości warunku prostopadłości prostych, błędnie stosowany warunek prostopadłości prostych. 		
Schemat oceny, łatwość sprawdzanych czynności				
Lp.	Oceniane czynności	Standard wymagań	Punktacja	Łatwość czynności
1.1.	Podanie równania rodziny prostych prostopadłych do danej	1	1	0,47
1.2.	Wyznaczenie wyrazu wolnego	1	1	0,46
1.3	Wyznaczenie miejsca zerowego funkcji	1	1	0,50
<p>Zadanie było dla zdających raczej trudne (wskaźnik łatwości $p=0,47$). Najprostsze okazało się w zadaniu wyznaczenie miejsca zerowego funkcji liniowej, a byłoby jeszcze łatwiejsze, gdyby nie zależało od wyznaczenia wcześniej wzoru funkcji $f(x)$. Problemem okazało się zastosowanie warunku prostopadłości prostych.</p>				

Zadanie 2

Tekst zadania 2 (3pkt.)				
Dany jest wektor $\vec{AB} = [-3, 4]$ oraz punkt $A = (1, -2)$.				
Oblicz:				
a) współrzędne punktu B ,				
b) współrzędne i długość wektora $\vec{v} = -2 \cdot \vec{AB}$.				
Umiejętności sprawdzane zadaniem:				
- obliczanie współrzędnych końca wektora przy danych współrzędnych wektora i jego początku,				
- wyznaczanie współrzędnych i długości iloczynu wektora przez liczbę.				
Przykładowe rozwiązanie			Najczęściej powtarzające się błędy:	
a) $B = (x_B, y_B)$, $\vec{AB} = [x_B - 1, y_B + 2] = [-3, 4]$ stąd $x_B = -2$, $y_B = 2$, $B = (-2, 2)$ b) $\vec{v} = -2 \cdot \vec{AB} = -2 \cdot [-3, 4] = [6, -8]$ $ \vec{v} = \sqrt{6^2 + (-8)^2} = \sqrt{100} = 10$			<ul style="list-style-type: none"> ➤ odczytywanie współrzędnych z rysunku zamiast obliczanie, ➤ mylenie początku i końca wektora, ➤ uzyskiwanie liczby ujemnej jako długości iloczynu wektora przez liczbę wynikłe z pomnożenia przez -2. 	
Schemat oceny, łatwość sprawdzanych czynności				
Lp.	Oceniane czynności	Standard wymagań	Punktacja	Łatwość czynności
2.1.	Obliczenie współrzędnych punktu B	3	1	0,71
2.2.	Wyznaczenie współrzędnych wektora	1	1	0,73
2.3	Obliczenie długości wektora	1	1	0,45
Zadanie okazało się umiarkowanie trudne (wskaźnik łatwości $p=0,63$). Część zdających sprawnie posługiwała się takimi pojęciami jak: współrzędne wektora, współrzędne początku i końca wektora, długość wektora, iloczyn wektora przez liczbę. Niestety byli też tacy, dla których długość wektora mogła być liczbą ujemną.				

Zadanie 3

Tekst zadania 3 (3pkt.)				
W klasie liczącej 30 zdających, dziewięciu obejrzało film pt. „Nasz XXI wiek”. Wychowawca klasy otrzymał 4 bilety i zamierza wylosować zdających, których zaprosi na projekcję tego filmu. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że wśród czterech wylosowanych z tej klasy zdających nie ma zdającego, który już ten film oglądał.				
Umiejętności sprawdzane zadaniem:				
<ul style="list-style-type: none"> - określanie zbioru zdarzeń elementarnych - obliczanie prawdopodobieństwa zdarzenia losowego 				
Przykładowe rozwiązanie		Najczęściej powtarzające się błędy:		
<p>Liczba wszystkich wyników losowania jest równa liczbie 4-elementowych kombinacji zbioru 30-elementowego, czyli</p> $\Omega = \binom{30}{4} = \frac{30!}{4! \cdot 26!} = 27 \cdot 7 \cdot 29 \cdot 5$ <p>Liczba wyników sprzyjających zdarzeniu A to liczba 4-elementowych kombinacji zbioru 21-elementowego, czyli</p> $A = \binom{21}{4} = \frac{21!}{4! \cdot 17!} = 9 \cdot 19 \cdot 35$ <p>Zatem $P(A) = \frac{ A }{ \Omega } = \frac{9 \cdot 19 \cdot 35}{27 \cdot 7 \cdot 29 \cdot 5} = \frac{19}{81}$</p>		<p>➤ problemy z poprawnym rozpoznaniem wyniku doświadczenia – kombinacja.</p>		
Schemat oceny, łatwość sprawdzanych czynności				
Lp.	Oceniane czynności	Standardy wymagań	Punktacja	Łatwość czynności
3.1.	Obliczenie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych	3	1	0,45
3.2.	Obliczenie liczby zdarzeń elementarnych sprzyjających zajściu zdarzenia A	3	1	0,40
3.3.	Obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia A	1	1	0,42
Zadanie okazało się raczej trudne (wskaźnik łatwości p=0,42). Kombinatoryka sprawia zdającym wiele problemów.				

Zadanie 4

Tekst zadania 4 (5 pkt.)

W pewnej szkole średniej po pierwszym półroczu przeprowadzono test z matematyki. Tabela przedstawia zestawienie wyników testu:

Ocena	1	2	3	4	5	6
a) Liczba zdających	10	30	80	30	25	5

Sporządź diagram słupkowy przedstawiający zestawienie wyników testu.

b) Oblicz średnią arytmetyczną uzyskanych ocen.

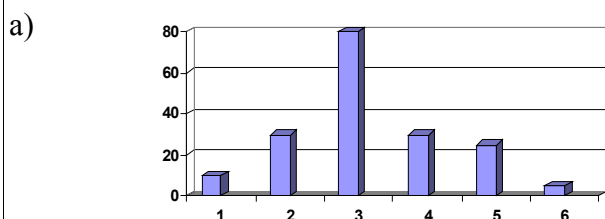
c) Oblicz, ilu zdających uzyskało ocenę wyższą od średniej arytmetycznej ocen.

Umiejętności sprawdzane zadaniem:

- Przedstawianie danych z tabeli na diagramie słupkowym,
- Obliczanie średniej arytmetycznej ocen.

Przykładowe rozwiązanie

Najczęściej powtarzające się błędy:



- błędnie obliczana średnia arytmetyczna,
- błędy rachunkowe (dodawanie).

b) średnia =
$$\frac{1 \cdot 10 + 2 \cdot 30 + 3 \cdot 80 + 4 \cdot 30 + 5 \cdot 25 + 6 \cdot 5}{10 + 30 + 80 + 30 + 25 + 5}$$

= 3,25

c) 30+25+5=60

Schemat oceny, łatwość sprawdzanych czynności

Lp.	Oceniane czynności	Standardy wymagań	Punktacja	Łatwość czynności
4.1.	Wyskalowanie osi	2	1	0,98
4.2.	Sporządzenie diagramu	2	1	0,97
4.2.	Obliczenie liczby wszystkich zdających	2	1	0,91
4.3.	Obliczenie średniej	2	1	0,80
4.5.	Podanie liczby zdających, którzy uzyskali ocenę powyżej średniej	1	1	0,86

Zadanie okazało się bardzo łatwe (wskaźnik łatwości p=0,90). Zdecydowana większość zdających rozwiązała to zadanie bezbłędnie.

Zadanie 5

Tekst zadania 5 (4 pkt.)				
Ania przeczytała książkę science-fiction w ciągu 13 dni, przy czym każdego dnia czytała o taką samą liczbę stron więcej, niż w dniu poprzednim. Ile stron miała ta książka, jeżeli wiadomo, że w trzecim dniu Ania przeczytała 28 stron a w ostatnim 68?				
Umiejętności sprawdzane zadaniem:				
<ul style="list-style-type: none"> - przeprowadzenie analizy zadania tekstowego, - zastosowanie wiadomości dotyczących ciągu arytmetycznego do zbudowania układu równań, - rozwiązanie układu równań. 				
Przykładowe rozwiązanie		Najczęściej powtarzające się błędy:		
<p>liczby stron przeczytanych w kolejnych dniach tworzą ciąg arytmetyczny, w którym: a_1 = liczba stron przeczytanych w pierwszym dniu, $a_3 = 28$, $a_{13} = 68$.</p> $\begin{cases} a_1 + 2r = 28 \\ a_1 + 12r = 68 \end{cases}$, rozwiązując ten układ dowolną metodą otrzymujemy: $a_1 = 20$, $r = 4$. $S_{13} = \frac{a_1 + a_{13}}{2} \cdot 13 = \frac{20 + 68}{2} \cdot 13 = 572$		<ul style="list-style-type: none"> ➤ błędne założenie, że liczby przeczytanych stron tworzą ciąg geometryczny, ➤ brak krytycznego spojrzenia na wynik – liczbę stron podawano w postaci ułamka, ➤ błędy rachunkowe. 		
Schemat oceny, łatwość sprawdzanych czynności				
Lp.	Oceniane czynności	Standardy wymagań	Punktacja	Łatwość czynności
5.1.	Dostrzeżenie, że liczby stron przeczytanych w kolejnych dniach tworzą ciąg arytmetyczny	2	1	0,75
5.2.	Ułożenie układu równań	2	1	0,62
5.3.	Rozwiązanie układu równań	1	1	0,61
5.4.	Obliczenie liczby stron książki	1	1	0,61
Zadanie okazało się umiarkowanie trudne (wskaźnik łatwości p=0,65). Trudność stanowiło zapisanie układem równań warunków wynikających z treści zadania.				

Zadanie 6

Tekst zadania 6 (3 pkt.)				
<p>Jeżeli $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ i $x_3 = -1$ są miejscami zerowymi wielomianu $W(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, gdzie $a \neq 0$ oraz $W(4) = 2$, to współczynnik a można wyznaczyć postępując w następujący sposób: Wielomian W zapisujemy w postaci iloczynowej: $W(x) = a(x-2)(x-3)(x+1)$ i wykorzystując warunek $W(4) = 2$ otrzymujemy równanie: $2 = a(4-2)(4-3)(4+1)$, stąd $a = \frac{1}{5}$.</p> <p>Postępując analogicznie, wyznacz współczynnik a wielomianu $W(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, wiedząc, że jego miejsca zerowe to $x_1 = -2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$ oraz $W(-1) = 3$.</p>				
Umiejętności sprawdzane zadaniem:				
<ul style="list-style-type: none"> - wyznaczanie równania prostej prostopadłej do danej i przechodzącej przez dany punkt, - wyznaczanie miejsca zerowego funkcji liniowej. 				
Przykładowe rozwiązanie		Najczęściej powtarzające się błędy:		
$W(x) = a(x+2)(x-1)(x-2)$ i $W(-1) = 3$, zatem: $3 = a(-1+2)(-1-1)(-1-2)$ $3 = 6a$, czyli $a = \frac{1}{2}$.		<ul style="list-style-type: none"> ➤ błędnie podstawiane liczby w miejsce argumentów, ➤ błędy rachunkowe. 		
Schemat oceny, łatwość badanych czynności				
Lp.	Oceniane czynności	Standardy wymagań	Punktacja	Łatwość czynności
6.1.	Przedstawienie wielomianu w postaci iloczynowej	2	1	0,94
6.2.	Wykorzystanie informacji o wartości wielomianu dla podanej liczby do ułożenia równania	2	1	0,88
6.3.	Wyznaczenie współczynnika a	2	1	0,78
Zadanie okazało się łatwe (wskaźnik łatwości $p=0,87$), co ogromnie cieszy. Okazuje się bowiem, że zdający potrafią rozwiązywać zadania według podanego w treści algorytmu, którego nie znają z lekcji.				

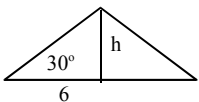
Zadanie 7

Tekst zadania 7 (4 pkt.)				
Planując czterotygodniowe wakacje, rodzina Kowalskich przeznaczyła pewną kwotę na wyżywienie. W pierwszym tygodniu wydano 30% zaplanowanej kwoty, w drugim tygodniu o 60 złotych mniej niż w pierwszym, w trzecim połowę reszty pieniędzy. Na czwarty tydzień zostało 270 złotych. Oblicz kwotę, którą rodzina Kowalskich przeznaczyła na wyżywienie.				
Umiejętności sprawdzane zadaniem:				
- rozwiązywanie zadań z tekstem.				
Przykładowe rozwiązanie			Najczęściej powtarzające się błędy:	
x - kwota, którą Kowalscy przeznaczyli na wyżywienie $0,3x$ - wydatki w pierwszym tygodniu $0,3x - 60$ - wydatki w drugim tygodniu $\frac{1}{2}[x - (0,3x + 0,3x - 60)]$ - wydatki w trzecim tygodniu 270 - wydatki w czwartym tygodniu $x = 0,3x + 0,3x - 60 + \frac{1}{2}[x - (0,3x + 0,3x - 60)] + 270$ Rozwiązując to równanie otrzymujemy $x = 1200$ zł.			<ul style="list-style-type: none"> ➤ błędna interpretacja treści zadania, ➤ błędnie zbudowane równanie, ➤ błędy rachunkowe i rzeczowe w rozwiązywaniu równania liniowego z ułamkowymi współczynnikami. 	
Schemat oceny, łatwość sprawdzanych czynności				
Lp.	Oceniane czynności	Standardy wymagań	Punktacja	Łatwość czynności
7.1.	Analiza zadania, oznaczenie niewiadomej	3	1	0,79
7.2.	Zapisanie wydatków w trzecim tygodniu wyrażeniem algebraicznym	3	1	0,54
7.3.	Ułożenie równania	3	1	0,57
7.4.	Rozwiązanie równania, podanie odpowiedzi.	1	1	0,51
Zadanie okazało się umiarkowanie trudne (wskaźnik łatwości $p=0,60$). Jest to niepokojące, z uwagi na wielokrotną obecność równań stopnia I w programie matematyki szkoły podstawowej i średniej.				

Zadanie 8

Tekst zadania 8 (5 pkt.)				
<p>Funkcja kwadratowa $f(x) = ax^2 + bx - 3$, gdzie $b > 0$ posiada dwa różne miejsca zerowe, których iloczyn jest równy (-3). Wiedząc, że funkcja ta przyjmuje najmniejszą wartość równą (-4), wyznacz:</p> <p>a) współczynniki a i b,</p> <p>b) miejsca zerowe funkcji f.</p>				
Umiejętności sprawdzane zadaniem:				
<p>- wykorzystywanie własności funkcji kwadratowej do wyznaczania współczynników</p> <p>- wyznaczanie miejsc zerowych funkcji kwadratowej.</p>				
Przykładowe rozwiązanie		Najczęściej powtarzające się błędy:		
<p>Z wzorów Viete'a $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$</p> <p>otrzymujemy: $\frac{-3}{a} = -3$, a stąd $a = 1$.</p> <p>Wiedząc, że najmniejsza wartość funkcji kwadratowej to $\frac{-\Delta}{4a}$, mamy:</p>		<ul style="list-style-type: none"> ➤ częsty brak próby rozwiązania, ➤ nieznajomość wzorów Viete'a lub błędne ich stosowanie, ➤ uznawanie za najmniejszą wartość argumentu, dla którego ta wartość jest przyjmowana. 		
Schemat oceny, łatwość sprawdzanych czynności				
Lp.	Oceniane czynności	Standard wymagań	Punktacja	Łatwość czynności
8.1.	Zapisanie warunku pozwalające wyznaczyć a	4	1	0,57
8.2.	Zapisanie warunku pozwalającego wyznaczyć b	4	1	0,32
8.3.	Wyznaczenie a	4	1	0,54
8.4.	Wyznaczenie b	4	1	0,28
8.5.	Obliczenie miejsc zerowych funkcji kwadratowej	1	1	0,40
<p>Zadanie okazało się trudne, (wskaźnik łatwości $p=0,42$) pomimo że na funkcję kwadratową zwraca się w szkole średniej dużą uwagę. Problem stanowiło zapisanie warunków wynikających z treści zadania i połączenie ich z poznanymi własnościami funkcji kwadratowej (wzory Viete'a, najmniejsza wartość funkcji)</p>				

Zadanie 9

Tekst zadania 9 (5 pkt.)				
Zaplanowano zalesić ugor w kształcie trójkąta równoramiennego, którego długość najdłuższego boku, na planie w skali 1:1500, jest równa 12 cm i jeden z kątów ma miarę 120°. W szkółce leśnej zamówiono sadzonki, w ilości pozwalającej obsadzić obszar wielkości 40 arów. Oblicz, czy zamówiona ilość sadzonek jest wystarczająca do zalesienia ugoru.				
Umiejętności sprawdzane zadaniem:				
<ul style="list-style-type: none"> - obliczanie pola trójkąta, - obliczanie pola figury podobnej w podanej skali, - porównywanie pól. 				
Przykładowe rozwiązanie		Najczęściej powtarzające się błędy:		
$\frac{h}{6} = \operatorname{tg} 30^\circ$ <div style="display: flex; align-items: center; justify-content: center;">  </div> <p>stąd $h = 6 \operatorname{tg} 30^\circ = 2\sqrt{3}$</p> $P_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 2\sqrt{3} = 12\sqrt{3} [cm^2]$ $P = P_{\Delta} \cdot s^2 = 12\sqrt{3} \cdot (1500)^2 [cm^2] = 27 \cdot 10^6 \sqrt{3} [cm^2]$ $1a = 100m^2 = 100 \cdot (100)^2 cm^2 = 10^6 cm^2$ $P = 27\sqrt{3} a < 40a$ <p>ilość sadzonek jest niewystarczająca</p>		<ul style="list-style-type: none"> ➤ często brak podejmowania próby rozwiązania, ➤ błędy związane z zamianą jednostek, ➤ nieznanomość pojęcia „ar”. 		
Schemat oceny, łatwość sprawdzanych czynności				
Lp.	Oceniane czynności	Standard wymagań	Punktacja	Łatwość czynności
9.1.	Wyznaczenie długości odcinków trójkąta	3	1	0,4
9.2.	Obliczenie pola działki na planie	3	1	0,45
9.3.	Obliczenie pola działki w rzeczywistości	3	1	0,27
9.4.	Zamiana jednostek	2	1	0,25
9.5.	Sprawdzenie, że liczba sadzonek nie wystarczy do obsadzenia działki	2	1	0,28
Zadanie okazało się trudne (wskaźnik łatwości p=0,33). Znaczna część zdających nie podejmowała próby rozwiązania zadania. Ci, którzy rozpoczęli rozwiązywanie, zwykle potrafili obliczyć pole działki na planie. Problemy pojawiały się, gdy należało zastosować skalę, zmienić jednostki. Większość zdających nie wie, co to jest ar.				

Zadanie 10

Tekst zadania 10 (5pkt.)				
<p>Dane są dwie bryły: stożek, w którym długość promienia podstawy jest równa 4 dm i wysokość ma długość $\frac{18}{\pi}$ dm oraz ostrosłup prawidłowy czworokątny, w którym krawędź podstawy ma długość $4\sqrt{3}$ dm. Wiedząc, że objętości tych brył są równe, wyznacz kąt nachylenia ściany bocznej ostrosłupa do jego podstawy.</p>				
Umiejętności sprawdzane zadaniem:				
<ul style="list-style-type: none"> - obliczanie objętości stożka, - wykorzystywanie wzoru na objętość ostrosłupa do obliczania wysokości ostrosłupa, - wyznaczanie kąta nachylenia ściany bocznej ostrosłupa do jego podstawy 				
Przykładowe rozwiązanie		Najczęściej powtarzające się błędy:		
<p>Stożek:</p> $V_{st} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot \frac{18}{\pi} = 96 \text{ [dm}^3\text{]}$ <p>Ostrosłup:</p> $P_p = (4\sqrt{3})^2 = 48 \text{ [dm}^2\text{]}$ $V_{ostr} = \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 48 \cdot h = 16h \text{ [dm}^3\text{]}$ $V_{ostr} = V_{st} \text{ stąd } 16h = 96 \text{ więc } h = 6 \text{ [dm]}$ <p>W trójkącie prostokątnym utworzonym przez wysokość ostrosłupa, wysokość ściany bocznej oraz odcinek równoległy do krawędzi podstawy ale 2 razy krótszy: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{6}{2\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ a $\alpha = 60^\circ$.</p>		<ul style="list-style-type: none"> ➤ na poprawnym rysunku ostrosłupa błędnie zaznaczany kąt nachylenia ściany bocznej do podstawy, ➤ stosowanie niewłaściwej funkcji trygonometrycznej. 		
Schemat oceny, łatwość sprawdzanych czynności				
Lp.	Oceniane czynności	Standard wymagań	Punkcja	Łatwość czynności
10.1.	Obliczenie objętości stożka	2	1	0,60
10.2.	Obliczenie pola podstawy ostrosłupa	2	1	0,56
10.3.	Obliczenie długości wysokości ostrosłupa	2	1	0,52
10.4.	Wyznaczenie funkcji trygonometrycznej kąta nachylenia ściany bocznej do podstawy	2	1	0,38
10.5.	Wyznaczenie kąta nachylenia ściany bocznej do podstawy	2	1	0,39
<p>Zadanie okazało się trudne (wskaźnik łatwości p=0,49). Zdający zazwyczaj sporządzali poprawne rysunki brył, ale nie dostrzegali niezbędnych zależności, wielką trudnością było poprawne zaznaczenie właściwego kąta. Problemem było też stosowanie funkcji trygonometrycznych w trójkącie prostokątnym.</p>				

Poziom rozszerzony

Opis zestawu zadań

Abiturienti przystępujący do egzaminu maturalnego z matematyki na poziomie rozszerzonym otrzymali zestaw 9 zadań otwartych wymagających praktycznego rozumienia elementów metodologii matematyki. Były to więc zadania trudniejsze niż na poziomie podstawowym i obejmujące szerszy zakres materiału programowego. Zadania punktowane były po: 4 pkt. (zad. 11, 12, 13), 6 pkt. (zad. 14, 15), 7 pkt. (zad. 16), 8pkt. (zad. 17) i 10pkt. (zad. 18 i 19), przy czym do zestawu zadań opracowany został szczegółowy schemat, według którego punktowane były pojedyncze czynności, które zdający powinien wykonać rozwiązując zadanie. W przypadku poprawnego rozwiązania inną metodą niż zaproponowana w kluczu, zdający także otrzymywał maksymalną liczbę punktów. Badane zadaniami umiejętności i pojedyncze czynności zdającego zostały przedstawione w rozdziale *Analiza jakościowa zadań*.

Podstawowe wskaźniki opisujące osiągnięcia zdających

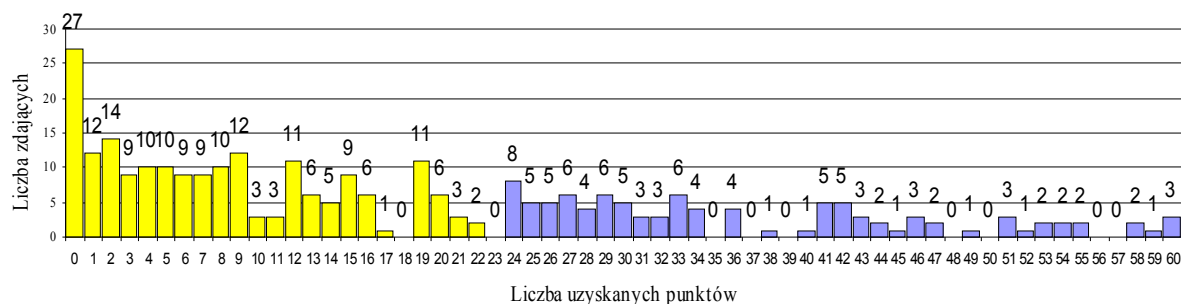
Tabela nr 3. Charakterystyka wyników osiągniętych przez zdających

Wskaźnik	Objaśnienie	Wartość	Komentarz
Liczba zdających		287	40% zdających maturę na nowych zasadach przystąpiło do egzaminu z matematyki na poziomie rozszerzonym.
Łatwość zestawu zadań	Stosunek liczby punktów uzyskanych przez wszystkich zdających do maksymalnej liczby punktów możliwych do uzyskania na egzaminie	0,30	Zestaw zadań okazał się dla maturzystów województwa śląskiego trudny.
Średnia arytmetyczna	Stosunek sumy punktów uzyskanych przez zdających do liczby zdających	17,84	Statystyczny maturzysta uzyskał 17,84 punktów na 60 możliwych do uzyskania. Oznacza to, że opanował 30% czynności sprawdzanych na egzaminie.
Mediana	Wynik środkowy, który dzieli zdających uporządkowanych rosnąco ze względu na sumę uzyskanych punktów na dwie równoliczne grupy	11	Środkowy zdający uzyskał 11 punktów, co stanowi 18% maksymalnej liczby punktów.
Najwyższy wynik		60	Najwyższy wynik uzyskało 3 zdających.
Najniższy wynik		0	Najniższy wynik uzyskało 27 zdających.

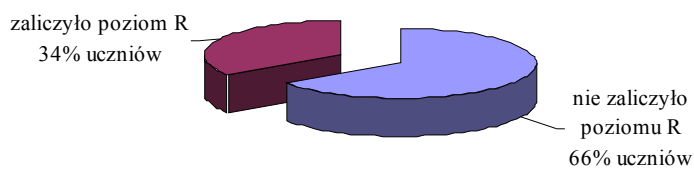
Odchylenie standardowe	Miara rozproszenia wyników w odniesieniu do średniej	15,94	Wyniki zdających są bardzo rozproszone. Przedziałem wyników typowych jest przedział od 2 do 33 punktów.
------------------------	--	-------	---

Rozkład liczby uzyskanych punktów

Wykres nr 5. Rozkład punktów uzyskanych przez zdających

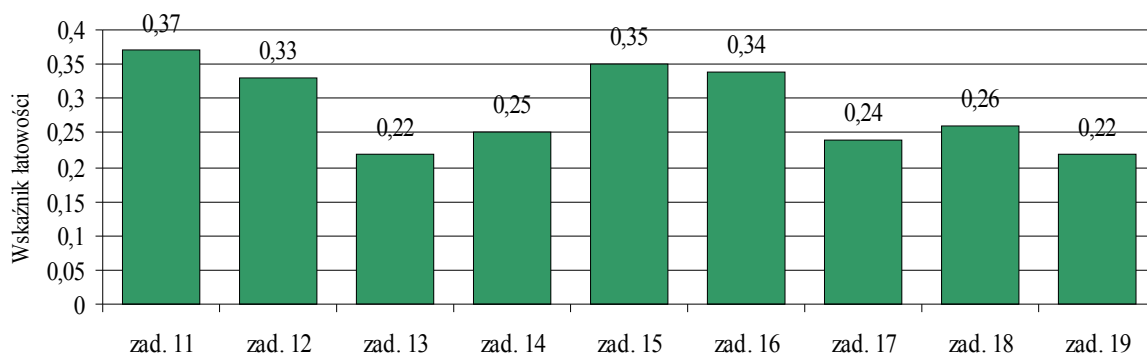


Wykres nr 6. %maturzystów, którzy zaliczyli poziom rozszerzony, uzyskując co najmniej 24 punktów

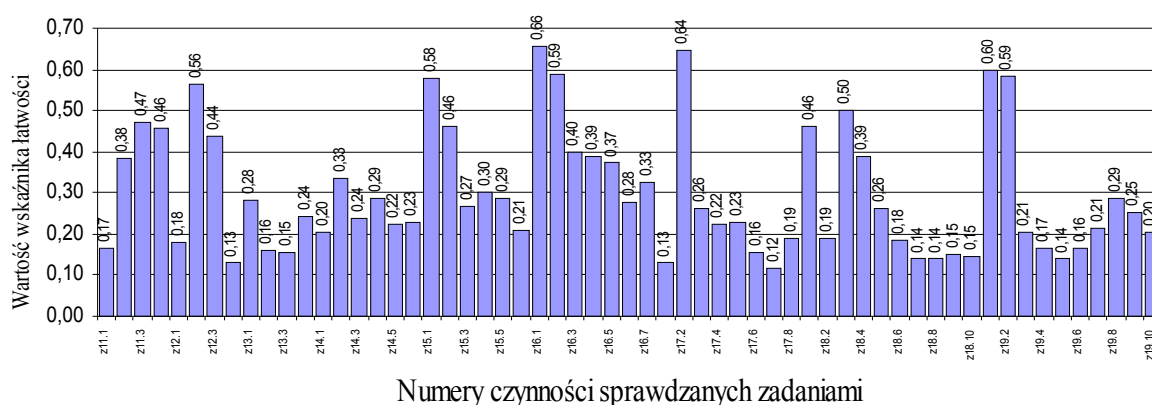


Łatwość zadań i standardów

Wykres nr 7. Łatwość zadań na poziomie rozszerzonym

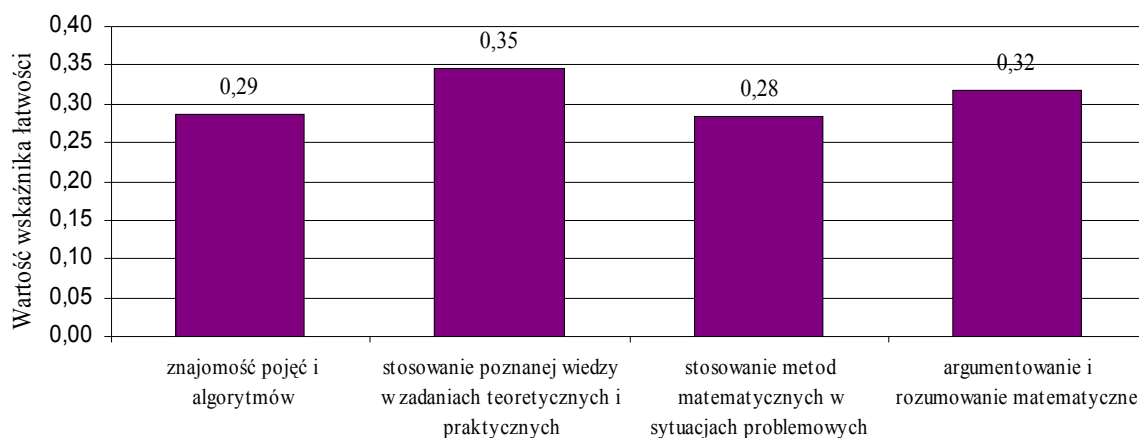


Wykres nr 8. Łatwość czynności sprawdzanych zadaniami



Numery czynności sprawdzanych zadaniami

Wykres nr 9. Łatwość czynności wg standardów wymagań



Wyniki zdających na skali staninowej

Do porównywania osiągnięć pomiędzy zdającymi na danym egzaminie proponujemy zastosować dziewięciopunktową skalę staninową. Uporządkowane rosnąco wyniki dzielimy na dziewięć ponumerowanych grup – staninów: 1. stanin zawiera 4% wyników **najniższych**, 2. stanin – 7% wyników **bardzo niskich**, 3. stanin – 12 % wyników **niskich**, 4. stanin – 17% wyników **niżej średnich**, 5. stanin – 20% wyników **średnich**, 6. stanin – 17% wyników **wyżej średnich**, 7. stanin – 12% wyników **wysokich**, 8. stanin – 7% wyników **wysokich**, 9. stanin – 4% wyników **najwyższych**.

Tabela nr 4. Wyniki zdających na znormalizowanej skali staninowej

Nazwa stanina	Najniższy	Bardzo niski	Niski	Niżej średni	Średni	Wyżej średni	Wysoki	Bardzo wysoki	Najwyższy
Numer stanina	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Przedział punktowy	0	1	2-3	4-8	9-18	19-28	29-41	42-52	53-60
Teoretyczny % wyników	4%	7%	12%	17%	20%	17%	12%	7%	4%
Empiryczny % wyników	9%	4%	8%	17%	20%	17%	13%	7%	4%

Analiza jakościowa zadań

Zadanie 11

Tekst zadania 11 (4 pkt.)				
Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie $mx^2 - 3(m+1)x + m = 0$ nie ma rozwiązania w zbiorze liczb rzeczywistych.				
Umiejętności sprawdzane zadaniem:				
<ul style="list-style-type: none"> - określenie warunków dla parametru m, aby równanie kwadratowe było sprzeczne - rozwiązanie nierówności kwadratowej 				
Przykładowe rozwiązanie			Najczęściej powtarzające się błędy:	
<p>Dla $m=0$ równanie przyjmuje postać: $-3x = 0$ i posiada 1 rozwiązanie</p> <p>Dla $m \neq 0$ równanie jest kwadratowe i nie posiada rozwiązań, gdy wyróżnik Δ jest ujemny.</p> $\Delta = 9(m+1)^2 - 4 \cdot m \cdot m = 5m^2 + 18m + 9$ $\Delta < 0 \Leftrightarrow 5m^2 + 18m + 9 < 0$ <p>a ta nierówność jest prawdziwa dla $m \in \left(-3; -\frac{3}{5}\right)$.</p> <p>Odp.: Podane równanie nie ma rozwiązania w zbiorze \mathbb{R} dla $m \in \left(-3; -\frac{3}{5}\right)$</p>			<ul style="list-style-type: none"> ➤ pomijanie analizy przypadku $m=0$, ➤ pomijanie założenia $m \neq 0$ przed przystąpieniem do obliczania wyróżnika Δ. 	
Schemat oceny, łatwość sprawdzanych czynności				
Lp.	Oceniane czynności	Standard wymagań	Punktacja	Łatwość czynności
11.1.	Sprawdzenie, że dla $m=0$ równanie ma rozwiązanie	2	1	0,17
11.2.	Podanie układu warunków na to, by równanie było sprzeczne	2	1	0,38
11.3.	Rozwiązanie układu warunków	1	1	0,47
11.4.	Podanie odpowiedzi	1	1	0,46
Zadanie okazało się dla zdających trudne (wskaźnik łatwości $p=0,37$). Najczęściej zdający zapominali, że parametr występujący we współczynniku przy x^2 decyduje, czy równanie jest kwadratowe czy nie.				

Zadanie 12

Tekst zadania 12 (4 pkt.)				
<p>A i B są zdarzeniami losowymi i $P(B) > 0$.</p> <p>Wykaż, że $P(A/B) \leq \frac{1-P(A')}{P(B)}$.</p>				
Umiejętności sprawdzane zadaniem:				
- stosowanie własności prawdopodobieństwa do dowodzenia twierdzeń				
Przykładowe rozwiązanie			Najczęściej powtarzające się błędy:	
<p>$A \cap B \subset A \Rightarrow P(A \cap B) \leq P(A) \Rightarrow P(A \cap B) \leq 1 - P(A')$</p> <p>oraz</p> $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B)$ <p>więc $P(A/B) \cdot P(B) \leq 1 - P(A')$ i z założenia $P(B) > 0$ zatem</p> $P(A/B) \leq \frac{1 - P(A')}{P(B)}$			<ul style="list-style-type: none"> ➤ zapisywanie wzorów, które mogą się przydać, ale brak ich wykorzystania, ➤ brak umiejętności przeprowadzenia logicznego dowodu. 	
Schemat oceny, łatwość sprawdzanych czynności				
Lp.	Oceniane czynności	Standard wymagań	Punktacja	Łatwość czynności
12.1.	Wykorzystanie zależności $(A \cap B) \subset A$	4	1	0,18
12.2.	Zastosowanie definicji prawdopodobieństwa zdarzenia przeciwnego	4	1	0,56
12.3.	Wykorzystanie definicji prawdopodobieństwa warunkowego	4	1	0,44
12.4.	Wykorzystanie zależności $P(B) > 0$ do wykazania tezy	4	1	0,13
Zadanie było dla maturzystów trudne (wskaźnik łatwości $p=0,33$). Po raz kolejny okazało się, że zadania wymagające uzasadniania, przeprowadzenia dowodu, są dla młodzieży najtrudniejsze.				

Zadanie 13

Tekst zadania 13 (5 pkt.)				
Sprawdź, że przekształcenie P płaszczyzny dane wzorem $P((x, y)) = (x + 1, -y)$ jest izometrią. Wyznacz równanie obrazu okręgu o równaniu $x^2 + y^2 - 2x = 0$ w przekształceniu P .				
Umiejętności sprawdzane zadaniem:				
<ul style="list-style-type: none"> - stosowanie definicji do sprawdzania, czy dane wzorem przekształcenie jest izometrią - wyznaczanie równania obrazu krzywej w podanym wzorem przekształceniu 				
Przykładowe rozwiązanie		Najczęściej powtarzające się błędy:		
<p>P jest izometrią \Leftrightarrow dla każdych dwóch punktów A i B płaszczyzny: $A'B' = AB$</p> <p>Jeśli $A = (x_1; y_1)$, $B = (x_2; y_2)$ to ich obrazy w przekształceniu P mają współrzędne:</p> <p>$A' = (x'_1; y'_1) = (x_1 + 1; -y_1)$, $B' = (x'_2; y'_2) = (x_2 + 1; -y_2)$</p> <p>$A'B' = \sqrt{(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2} =$ $\sqrt{[(x_2 + 1) - (x_1 + 1)]^2 + [(-y_2) - (-y_1)]^2} =$ $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = AB$</p> <p>co należało pokazać.</p> <p>Jeśli $\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = -y \end{cases}$, to $\begin{cases} x = x' - 1 \\ y = -y' \end{cases}$. Zatem, równanie obrazu okręgu będzie miało postać:</p> <p>$(x' - 1)^2 + (-y')^2 - 2(x' - 1) = 0$</p> <p>czyli: $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$.</p>		<ul style="list-style-type: none"> ➤ nieznanie definicji izometrii, co powodowało nieumiejętność sformułowania warunku, ➤ podstawianie współrzędnych obrazu punktu do równania okręgu, ➤ błędne wykorzystanie równań przekształcenia do uzyskania równania obrazu okręgu. 		
Schemat oceny, łatwość sprawdzanych czynności				
Lp.	Oceniane czynności	Standard wymagań	Punktacja	Łatwość czynności
13.1.	Powołanie się na definicję izometrii	4	1	0,28
13.2.	Wybór dwóch punktów A i B i wyznaczenie współrzędnych ich obrazów	4	1	0,16
13.3.	Sprawdzenie, że odległości $ AB $ i $ A'B' $ są równe	3	1	0,15
13.4.	Wyznaczenie równania obrazu danego okręgu w przekształceniu P	3	1	0,24
Zadanie okazało się trudne (wskaźnik łatwości $p=0,22$). Zadanie wymagało zastosowania definicji izometrii i sprawdzenia warunku analitycznie.				

Zadanie 14

Tekst zadania 14 (6 pkt.)

Zaznacz na płaszczyźnie zbiór $F = \left\{ (x, y) : x \in R \wedge y \in R \wedge \log_{\frac{1}{2}}(|x|-1) \geq -2 \wedge |y| > 0 \right\}$.

Napisz równania osi symetrii figury F .

Umiejętności sprawdzane zadaniem:

- rozwiązywanie nierówności z wartością bezwzględną oraz nierówności logarytmicznych
- wyznaczanie części wspólnej dwóch zbiorów
- przedstawianie w układzie współrzędnych zbioru punktów, których współrzędne spełniają podane warunki
- wskazywanie osi symetrii figury i podawanie ich równań.

Przykładowe rozwiązanie

$$(*) \log_{\frac{1}{2}}(|x|-1) \geq -2$$

warunek $|y| > 0$

oznacza $y \in R \setminus \{0\}$

dziedziną tej nierówności jest zbiór, w którym $|x|-1 > 0$ czyli

$$(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$$

Wiedząc, że funkcja logarytmiczna o

podstawie $\frac{1}{2}$ jest malejąca w swojej

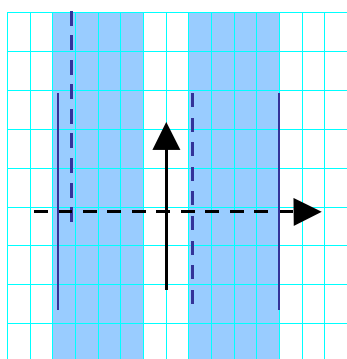
dziedzinie możemy nierówność (*)

zapisać w postaci:

$$|x|-1 \leq 4 \text{ czyli } x \in \langle -5; 5 \rangle.$$

uwzględniając dziedzinę, nierówność

spełniają liczby $x \in \langle -5; -1 \rangle \cup \langle 1; 5 \rangle$.



Ośiami symetrii tej figury są osie układu współrzędnych, czyli proste o równaniach:

$$y = 0 \text{ i } x = 0$$

Najczęściej powtarzające się błędy:

- zapominanie o dziedzinie funkcji logarytmicznej,
- błędnie rozwiązywane proste nierówności z wartością bezwzględną, mylenie spójników „i” oraz „lub”.

Schemat oceny, łatwość sprawdzanych czynności

Lp.	Oceniane czynności	Standard wymagań	Punktacja	Łatwość czynności
14.1.	Wyznaczenie dziedziny nierówności logarytmicznej	1	1	0,20
14.2.	Wykorzystanie monotoniczności funkcji logarytmicznej do rozwiązania nierówności	2	1	0,33

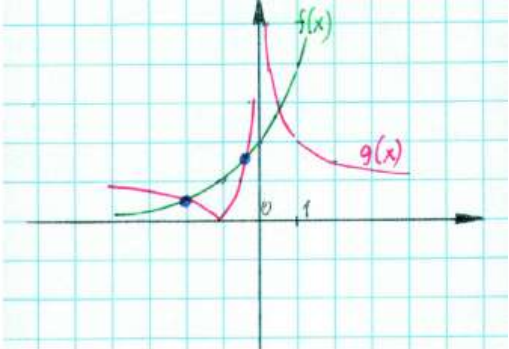
14.3.	Rozwiązanie nierówności z uwzględnieniem jej dziedziny	1	1	0,24
14.4	Rozwiązanie warunku na y	1	1	0,29
14.5	Naszkicowanie figury F	3	1	0,22
14.6.	Podanie równań osi symetrii figury F .	1	1	0,23

Zadanie okazało się trudne (wskaźnik łatwości $p=0,25$). Problemem było pamiętanie o określeniu dziedziny nierówności logarytmicznej i rozwiązywanie prostych nierówności z wartością bezwzględną. Wyraźnie widać też konsekwencję rezygnacji z elementów logiki (jako oddzielnego działu) w programie matematyki.

Zadanie 15

Tekst zadania 15 (6 pkt.)				
Objętość walca jest równa $250\pi \text{ cm}^3$. Przedstaw pole powierzchni całkowitej tego walca jako funkcję długości promienia jego podstawy i określ dziedzinę tej funkcji. Wyznacz długość promienia takiego walca, którego pole powierzchni całkowitej jest najmniejsze.				
Umiejętności sprawdzane zadaniem:				
<ul style="list-style-type: none"> - przekształcanie wyrażeń algebraicznych - wyznaczanie dziedziny funkcji wymiernej - obliczanie pochodnej funkcji wymiernej - badanie warunku koniecznego i wystarczającego na istnienie ekstremum funkcji w punkcie - uzasadnianie, że minimum lokalne jest równocześnie wartością najmniejszą. 				
Przykładowe rozwiązanie			Najczęściej powtarzające się błędy:	
$\left. \begin{aligned} V &= 250\pi \\ V &= \Pi r^2 \cdot h \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Pi r^2 = 250\pi \Rightarrow h = \frac{250}{r^2}$ $P_c = \Pi(2r^2 + 2r \cdot h) = \Pi\left(r^2 + 2r \cdot \frac{250}{r^2}\right) = \Pi\left(r^2 + \frac{500}{r}\right)$ <p>dziedziną funkcji $P_c(r)$ jest zbiór R_+.</p> $P'_c(r) = \Pi\left(4r - \frac{500}{r^2}\right) = \Pi \cdot \frac{4r^3 - 500}{r^2} = 4\Pi \frac{r^3 - 125}{r^2} =$ $4\Pi \frac{(r-5)(r^2 + 5r + 25)}{r^2}$ <p>$P'_c = 0$ dla $r = 5$ (warunek konieczny istnienia ekstremum funkcji).</p> <p>Dla $r = 5$ funkcja osiąga minimum lokalne, ponieważ w tym punkcie następuje zmiana znaku pochodnej: dla $r \in (0;5)$ pochodna jest ujemna (funkcja w tym przedziale maleje), zaś dla $r \in (5;+\infty)$ pochodna jest dodatnia (funkcja rośnie).</p> <p>Oznacza to również, że w tym punkcie funkcja osiąga wartość najmniejszą.</p>			<ul style="list-style-type: none"> ➤ brak określenia dziedziny, ➤ błędy przy obliczaniu pochodnej, ➤ poprzestawanie na sprawdzeniu warunku koniecznego istnienia ekstremum, ➤ mylenie pojęć: „minimum” i „wartość najmniejsza”. 	
Schemat oceny, łatwość sprawdzanych czynności				
Lp.	Oceniane czynności	Standard wymagań	Punktacja	Łatwość czynności
15.1.	Wyznaczenie długości wysokości walca w zależności od długości promienia podstawy	1	1	0,58
15.2.	Wyznaczenie pola powierzchni całkowitej walca jako funkcji długości promienia	2	1	0,46
15.3.	Określenie dziedziny funkcji	1	1	0,27
15.4.	Wyznaczenie pochodnej funkcji P	1	1	0,30
15.5.	Zbadanie warunku koniecznego istnienia ekstremum	1	1	0,29
15.6.	Uzasadnienie, że funkcja osiąga wartość najmniejszą	3	1	0,21
Zadanie okazało się trudne (wskaźnik łatwości p=0,35). Podstawowym problemem w tym zadania było poprzestawanie na sprawdzeniu warunku koniecznego istnienia ekstremum.				

Zadanie 16

Tekst zadania 16 (7 pkt.)				
<p>Naszkiuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji $f(x) = 2^{x+1}$ oraz $g(x) = \left \frac{x+1}{x} \right$. Na podstawie wykonanego rysunku określ liczbę ujemnych rozwiązań równania $f(x) = g(x)$.</p>				
Umiejętności sprawdzane zadaniem:				
<ul style="list-style-type: none"> - sporządzanie wykresów funkcji wykładniczej i homograficznej - przekształcanie wykresów funkcji - odczytywanie z wykresów dwóch funkcji liczby rozwiązań ujemnych równania $f(x) = g(x)$. 				
Przykładowe rozwiązanie			Najczęściej powtarzające się błędy:	
<p>Wykres funkcji $f(x)$ powstaje z przesunięcia wykresu funkcji wykładniczej $y = 2^x$ o wektor $[-1; 0]$. Natomiast wykres $g(x)$ powstaje poprzez przesunięcie wykresu funkcji $y = \frac{1}{x}$ o wektor $[0; 1]$, a następnie przekształcenie tej części wykresu, która znajduje się pod osią Ox w symetrii względem tej osi.</p>			<ul style="list-style-type: none"> ➤ błędne przekształcenie wykresu funkcji wykładniczej (przesunięcie w drugą stronę), ➤ błędnie szkicowany wykres wartości bezwzględnej funkcji homograficznej, ➤ brak zrozumienia wyrażenia <i>liczba ujemnych rozwiązań</i>, ➤ brak odpowiedzi. 	
				
<p>Z rysunku wynika, że istnieją trzy rozwiązania równania (trzy punkty wspólne wykresów), ale tylko dwa są ujemne.</p>				
Schemat oceny, łatwość sprawdzanych czynności				
Lp.	Oceniane czynności	Standard wymagań	Punktacja	Łatwość czynności
16.1.	Naszkiowanie wykresu funkcji $y = 2^x$	3	1	0,66
16.2.	Naszkiowanie wykresu funkcji $y = 2^{x+1}$	3	1	0,59
16.3.	Przekształcenie wyrażenia $\frac{x+1}{x}$ do postaci $1 + \frac{1}{x}$	2	1	0,40
16.4.	Naszkiowanie wykresu funkcji $y = \frac{1}{x}$	3	1	0,39
16.5.	Naszkiowanie wykresu funkcji $y = \frac{1}{x} + 1$	3	1	0,37
16.6.	Naszkiowanie wykresu funkcji $y = \left \frac{1}{x} + 1 \right $	3	1	0,28

16.7.	Podanie liczby ujemnych rozwiązań równania $f(x) = g(x)$	2	1	0,33
Zadanie okazało się trudne (wskaźnik łatwości $p=0,34$). Zdający mieli największe problemy z przekształcaniem wykresów funkcji.				

Zadanie 17

Tekst zadania 17 (8 pkt.)				
Rozwiąż równanie: $2 \sin 2x + \operatorname{ctg} x = 4 \cos x$ dla $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$. Ze zbioru rozwiązań tego równania losujemy bez zwracania dwie liczby. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że co najmniej jedno z wylosowanych rozwiązań jest wielokrotnością liczby $\frac{\pi}{2}$.				
Umiejętności sprawdzane zadaniem:				
<ul style="list-style-type: none"> - stosowanie poznanych wzorów do przekształcania wyrażeń trygonometrycznych - rozwiązywanie równań trygonometrycznych w podanym przedziale - określanie zbioru zdarzeń elementarnych dla danego doświadczenia - obliczanie prawdopodobieństwa zdarzeń przy wykorzystaniu elementów kombinatoryki 				
Przykładowe rozwiązanie		Najczęściej powtarzające się błędy:		
<p>Funkcja $\operatorname{ctg} x$ jest określona dla $x \neq 0 + k\pi$, zatem dziedziną równania jest $x \in (0; \pi) \cup (\pi; 2\pi)$.</p> $4 \sin x + \frac{\cos x}{\sin x} = 4 \cos x, \quad \cos x \left(4 \sin x + \frac{1}{\sin x} - 4 \right) = 0$ $\cos x (4 \sin^2 x - 4 \sin x + 1) = 0, \quad \cos x (2 \sin x - 1)^2 = 0$ $\cos x = 0 \vee \sin x = \frac{1}{2}$ <p>w zbiorze $(0; \pi) \cup (\pi; 2\pi)$ rozwiązaniami są:</p> $x_1 = \frac{1}{2} \pi, x_2 = \frac{3}{2} \pi, x_3 = \frac{1}{6} \pi, x_4 = \frac{5}{6} \pi$ $\Omega = \left\{ \omega = \{x, y\} : x, y = \frac{1}{2} \pi, \frac{3}{2} \pi, \frac{1}{6} \pi, \frac{5}{6} \pi \right\}$ $\overline{\Omega} = C_2^4 = \binom{4}{2} = 6$ $A = \left\{ \omega = \{x, y\} \in \Omega \wedge \left(x \vee y = \frac{1}{2} \pi, \frac{3}{2} \pi \right) \right\}$ $\overline{A} = 5$ $P(A) = \frac{\overline{A}}{\overline{\Omega}} = \frac{5}{6}$		<ul style="list-style-type: none"> ➤ brak określenia dziedziny równania, ➤ liczne problemy z przekształcaniem wyrażeń trygonometrycznych, ➤ dzielenie równania przez $\cos x$, które może być równe 0 i przez to pomijanie pewnej liczby rozwiązań, ➤ problemy z kombinatoryką – rozpoznaniem, czym są zdarzenia elementarne. 		
Schemat oceny, łatwość sprawdzanych czynności				
Lp.	Oceniane czynności	Standard wymagań	Punktacja	Łatwość czynności
17.1.	Wyznaczenie dziedziny danego równania	1	1	0,13
17.2.	Przekształcenie równania do postaci $4 \sin x \cos x + \frac{\cos x}{\sin x} = 4 \cos x$	3	1	0,64

17.3.	Przekształcenie równania do postaci $\cos x(4\sin^2 x + 1 - 4\sin x) = 0$	3	1	0,26
17.4.	Rozwiązanie równania $\cos x = 0$ w danej dziedzinie	3	1	0,22
17.5.	Rozwiązanie równania $4\sin^2 x - 4\sin x + 1 = 0$ w danej dziedzinie	3	1	0,23
17.6.	Obliczenie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych	4	1	0,16
17.7.	Obliczenie liczby zdarzeń sprzyjających A	4	1	0,12
17.8.	Obliczenie prawdopodobieństwa zajścia zdarzenia A	3	1	0,19
Zadanie okazało się trudne (wskaźnik łatwości $p=0,24$). Problemy zdających z tym zadaniem można podzielić na dwie grupy: 1. związane z przekształcaniem wyrażeń trygonometrycznych, 2. dotyczące elementów kombinatoryki.				

Zadanie 18

Tekst zadania 18 (10 pkt.)				
Rozwiąż nierówność $\frac{1}{2^x} + \frac{1}{4^x} + \frac{1}{8^x} + \dots > 2^x - 0,(9)$, gdzie lewa strona tej nierówności jest sumą nieskończonego ciągu geometrycznego.				
Umiejętności sprawdzane zadaniem:				
<ul style="list-style-type: none"> - wyznaczanie sumy nieskończonego ciągu geometrycznego wraz ze sformułowaniem warunku na jej istnienie - zamiana ułamka okresowego na zwykły - rozwiązywanie nierówności wykładniczych - rozwiązywanie nierówności wymiernych 				
Przykładowe rozwiązanie			Najczęściej powtarzające się błędy:	
<p>$a_1 = \frac{1}{2^x}$, $q = \frac{1}{2^x}$. Ciąg ma sumę, gdy jest zbieżny do zera, a warunkiem na to jest, by moduł ilorazu ciągu był mniejszy od 1: $\left \frac{1}{2^x} \right < 1 \Leftrightarrow 2^x > 1 \Leftrightarrow x \in (0; +\infty)$</p> $S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{2^x}}{1-\frac{1}{2^x}} = \frac{1}{2^x - 1}$ <p>Z kolei $0,(9) = 0,9 + 0,009 + \dots = \frac{0,9}{1-0,1} = 1$.</p> <p>Zatem nierówność przyjmuje postać:</p> $\frac{1}{2^x - 1} > 2^x - 1, \text{ wprowadzając nową zmienną}$ $t = 2^x - 1, t > 0 :$ $\frac{1}{t} > t \Leftrightarrow \frac{1-t^2}{t} > 0 \Leftrightarrow \frac{(1-t) \cdot (1+t)}{t} > 0 \Leftrightarrow t \in (0;1)$ <p>Wracając do podstawienia mamy:</p> $0 < 2^x - 1 < 1 \Leftrightarrow 1 < 2^x < 2 \Leftrightarrow 0 < x < 1$ <p>Liczby z przedziału $(0;1)$ spełniają warunek zbieżności ciągu do zera, więc rozwiązaniem nierówności jest: $x \in (0;1)$.</p>			<ul style="list-style-type: none"> ➤ brak umiejętności zamiany ułamka okresowego na zwykły, ➤ pomijanie warunku istnienia sumy nieskończonego ciągu geometrycznego lub błędne rozwiązanie tego warunku, ➤ błędne rozwiązywanie nierówności wymiernych. 	
Schemat oceny, łatwość sprawdzanych czynności				
Lp.	Oceniane czynności	Standard wymagań	Punktacja	Łatwość czynności
18.1.	Zauważenie, ile jest równy pierwszy wyraz i iloraz ciągu	4	1	0,46
18.2.	Określenie dla jakich x ciąg geometryczny jest zbieżny do zera i ma sumę	1	1	0,19
18.3.	Wyznaczenie sumy nieskończonego ciągu geometrycznego	3	1	0,50
18.4.	Zamiana ułamka okresowego na zwykły	3	1	0,39
18.5.	Wprowadzenie pomocniczej zmiennej za $\left(\frac{1}{2}\right)^x$	3	1	0,26
18.6.	Przekształcenie nierówności do postaci iloczynowej	3	1	0,18

18.7.	Rozwiązanie nierówności z wprowadzoną zmienną	3	1	0,14
18.8.	Przekształcenie rozwiązania nierówności ze zmienną t na warunek z x	3	1	0,14
18.	Zapisanie rozwiązania nierówności z x	3	1	0,15
18.	Sprawdzenie, czy otrzymane wartości należą do dziedziny nierówności	4	1	0,15

Zadanie okazało się trudne (wskaźnik łatwości $p=0,26$). Zdający mieli trudności z zamianą ułamka okresowego na zwykły, pamiętaniem o konieczności sprawdzenia, czy i kiedy występujący ciąg geometryczny ma sumę. Wystąpiły też problemy z rozwiązywaniem nierówności wymiernych.

Zadanie 19

Tekst zadania 19 (10 pkt.)	
W trójkącie jeden z kątów ma miarę 120° . Długości boków tego trójkąta są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego, którego suma wynosi 30. Wyznacz stosunek długości promienia okręgu opisanego na tym trójkącie do długości promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt.	
Umiejętności sprawdzane zadaniem:	
<ul style="list-style-type: none"> - stosowanie wiadomości o ciągu arytmetycznym do opisanego związku między bokami trójkąta - stosowanie twierdzeń: kosinusów i sinusów - rozwiązywanie układu równań, z których jedno jest liniowe, a drugie kwadratowe - obliczanie pola trójkąta - stosowanie zależności pomiędzy polem trójkąta a długością promienia wpisanego w ten trójkąt 	
Przykładowe rozwiązanie	Najczęściej powtarzające się błędy:
$a + (a + r) + (a + 2r) = 30, r > 0$ $a + r = 10 \Rightarrow a = 10 - r$ <p>z tw. kosinusów:</p> $(a + 2r)^2 = a^2 + (a + r)^2 - 2a(a + r)\cos 120^\circ$ <p>czyli: $2a^2 - ar - 3r^2 = 0$</p> <p>Rozwiązując układ równań: $\begin{cases} a = 10 - r \\ 2a^2 - ar - 3r^2 = 0 \end{cases}$ mamy $a = 6, r = 4$</p> <p>Długości boków trójkąta to: $a = 6, b = 10, c = 14$</p> <p>Z tw. sinusów: $\frac{c}{\sin 120^\circ} = 2R \Rightarrow \frac{14}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2R \Rightarrow R = \frac{14\sqrt{3}}{3}$</p> <p>Wiedząc, że: $P_\Delta = \frac{1}{2}ab \sin 120^\circ = 15\sqrt{3}$ i $P_\Delta = s \cdot p$, s - promień okręgu wpisanego w trójkąt, p - połowa obwodu trójkąta</p> $s = \frac{P_\Delta}{p} = \frac{15\sqrt{3}}{15} = \sqrt{3}, \text{ zatem } \frac{R}{s} = \frac{\frac{14\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{3}} = \frac{14}{3}$	<ul style="list-style-type: none"> ➤ wybór innej metody niż skorzystanie z twierdzenia kosinusów często nie prowadziło do dobrego wyniku, ➤ liczne błędy i pomyłki w przekształceniach wyrażeń algebraicznych i rachunkach.

Schemat oceny, łatwość sprawdzanych czynności				
Lp.	Oceniane czynności	Standard wymagań	Punktacja	Łatwość czynności
19.1.	Wyrażenie długości boków przy pomocy a (długość najkrótszego boku) i $r > 0$ (różnica ciągu)	4	1	0,60
19.2.	Wykorzystanie informacji o sumie ciągu arytmetycznego	4	1	0,59
19.3.	Zastosowanie twierdzenia kosinusów	3	1	0,21
19.4.	Zapisanie układu równań z niewiadomymi a i r	3	1	0,17
19.5.	Rozwiązanie układu równań	3	1	0,14
19.6.	Podanie długości boków trójkąta	1	1	0,16
19.7.	Obliczenie pola trójkąta	3	1	0,21
19.8.	Obliczenie długości promienia okręgu opisanego na trójkącie	3	1	0,29
19.9.	Obliczenie długości promienia okręgu wpisanego w trójkąt	3	1	0,25
19.10.	Wyznaczenie wartości stosunku długości promieni	1	1	0,20

Zadanie okazało się trudne (wskaźnik łatwości $p=0,22$). Większość zdających poprawnie wykorzystała informacje o ciągu arytmetycznym, potrafiła też wypisać potrzebne wzory z pamięci lub tablic, niestety nie wszyscy umieli je wykorzystać, często gmatwali się w przekształceniach.