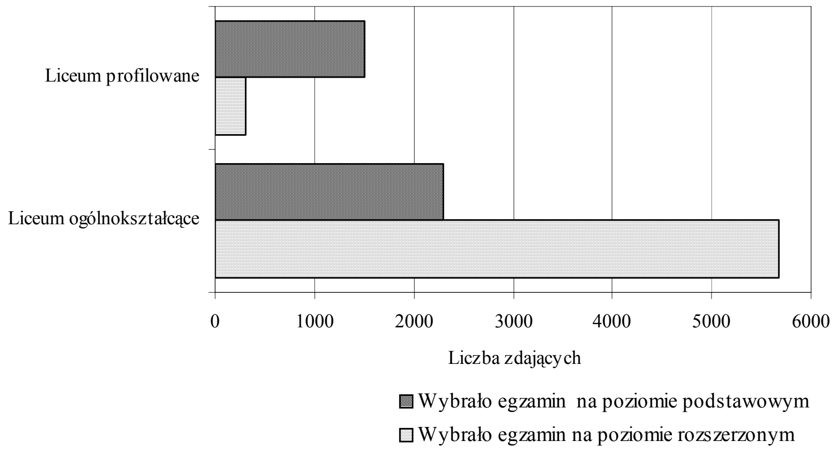
Matematyka

1. Ogólna informacja o zdających

Egzamin maturalny z matematyki pisało 9 783 abiturientów. Stanowi to 27,9% spośród ogółu przystępujących do matury. W zdecydowanej większości, do matury z matematyki przystępowali absolwenci liceów ogólnokształcących. Spośród osób zdających matematykę, 7 971 maturzystów uczęszczało do liceów ogólnokształcących, a 1 812 – do liceów profilowanych.

Wykres 1. Zdający maturę z matematyki a typ szkoły

Wykres 2. Zdający a wybierany przez nich poziom egzaminu



Matematykę na poziomie rozszerzonym wybrało 5 672 maturzystów, którzy uczęszczali do liceów ogólnokształcących i 303 – którzy uczęszczali do liceów profilowanych. Matematykę na poziomie podstawowym wybrało 2 299 abiturientów liceów ogólnokształcących i 1 509 – liceów profilowanych.

Wśród abiturientów liceów ogólnokształcących więcej było tych, którzy podjęli decyzję, iż będą zdawać egzamin na poziomie rozszerzonym. Maturzyści uczący się w liceach profilowanych raczej zdawali matematykę na poziomie podstawowym.

2. Opis arkuszy egzaminacyjnych

Arkusze egzaminacyjne z matematyki zostały opracowane na dwóch poziomach:

- podstawowym – *Arkusz I* (MMA-P1A1P-052),
- rozszerzonym – *Arkusz II* (MMA-R1A1P-052).

Arkusz I złożony był z 10 zadań otwartych. Badały one:

- rozumienie i umiejętność stosowania pojęć matematycznych w prostych sytuacjach (również tych życiowych),
- umiejętność zastosowania poznanej wiedzy w zadaniach o charakterze problemowym.

W każdym zadaniu punktowane były pojedyncze czynności, jakie zdający powinien wykonać przy ich rozwiązywaniu. Egzamin maturalny z matematyki na poziomie podstawowym trwał 120 minut.

Arkusz II obejmował 9 zadań otwartych, sprawdzających umiejętność rozwiązywania problemów matematycznych. Na rozwiązanie zadań arkusza na tym poziomie przeznaczono 150 minut.

Każdy z maturzystów mógł uzyskać maksymalnie, zarówno z poziomu podstawowego, jak i rozszerzonego, po 50 punktów. Wyniki egzaminu zostały przeliczone na procent uzyskanych punktów i w takiej postaci wpisane na świadectwie dojrzałości.

3. Wyniki egzaminu ogółu zdających

W poniższym rozdziale przedstawiamy łącznie wyniki tych abiturientów, którzy wybrali na egzaminie maturalnym matematykę jako przedmiot obowiązkowy, jak i tych, którzy wybrali ten przedmiotu jako dodatkowy.

W poniższej tabeli prezentujemy wyniki egzaminu maturalnego z matematyki w skali staninowej.

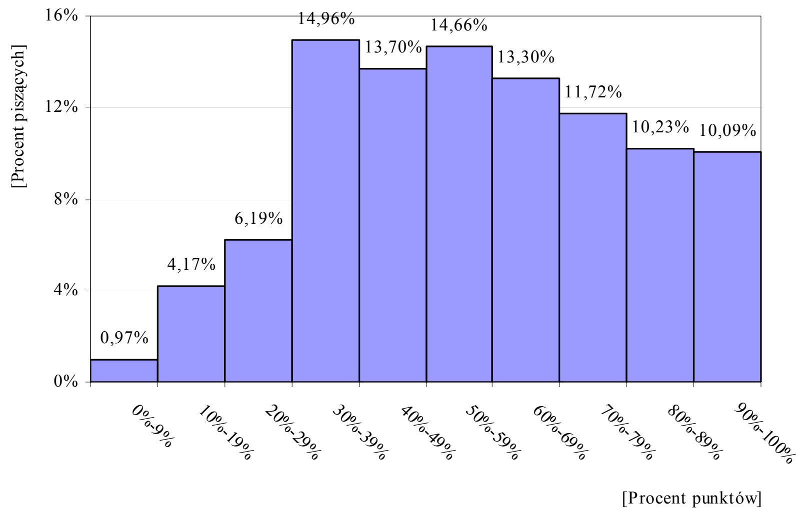
Tabela 1. Wyniki egzaminu ogółu zdających w skali staninowej[1]

Stopień skali	Teoretyczny procent zdających	Nazwa stanina	Wyniki dla *Arkusza I* (% punktów)	Procent zdających	Wyniki dla *Arkusza II* (% punktów)	Procent zdających
1	4	Najniższy	0 – 16	3,9	0 – 6	5,6
2	7	Bardzo niski	18 – 26	7,2	8 – 10	6,8
3	12	Niski	28 – 36	12,5	12 – 16	9,2
4	17	Niżej średniego	38 – 48	16,4	18 – 28	20,2
5	20	Średni	50 – 62	19,7	30 – 38	16,6
6	17	Wyżej średniego	64 – 76	17,9	40 – 50	18,7
7	12	Wysoki	78 – 88	12,3	52 – 60	11,2
8	7	Bardzo wysoki	90 – 94	5,7	62 – 72	7,3
9	4	Najwyższy	96 – 100	4,4	74 – 100	4,4

Wynik maturzysty, który za *Arkusz I* uzyskał 50 % punktów znajduje się w 5. staninie. Wynik porównywalny uzyskało 19,7% piszących, niższy – 40,0%, a wyższy – 40,3%.

[1] Definicja skali staninowej zamieszczona została w słowniku terminów (patrz s. 359).

Wykres 3. Rozkład wyników uzyskanych przez ogół zdających za *Arkusz I*



Wykres 4. Rozkład wyników uzyskanych przez ogół zdających za *Arkusz II*

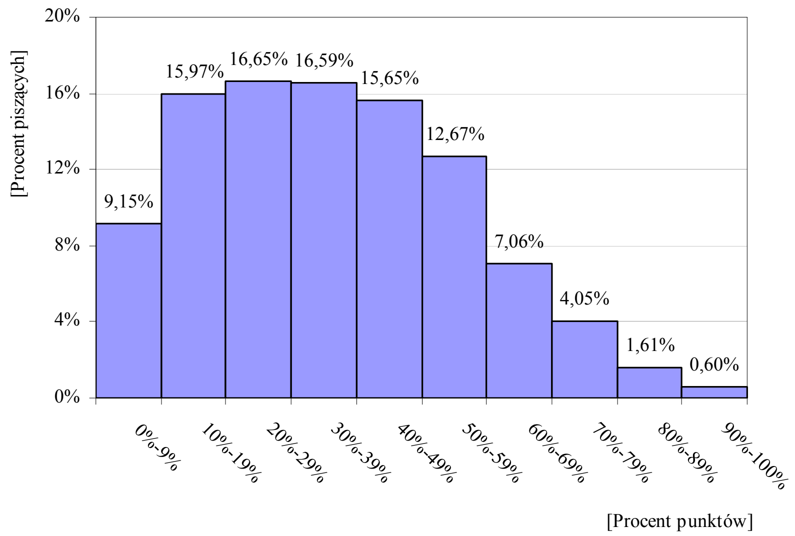


Tabela 2. Statystyczny opis wyników egzaminu ogółu zdających

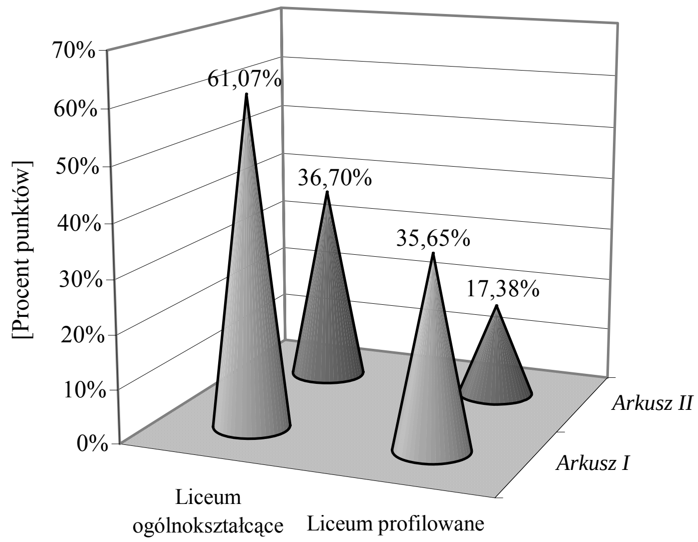
	Arkusz I (% punktów)	*Arkusz II* (% punktów)
Wynik środkowy (mediana – Me)	56	34
Wynik średni (średnia arytmetyczna – M)	56,37	35,44
Odchylenie standardowe	23,27	20,22

Zdający najczęściej uzyskiwali wynik: 30% punktów na poziomie podstawowym i 28% punktów na poziomie rozszerzonym. Wartość średniej arytmetycznej wskazuje, że zadania z *Arkusza I* były dla abiturientów *umiarkowanie trudne*, a zadania *Arkusza II* – *trudne*. Najwyższy wynik uzyskany za arkusz rozwiązywany na poziomie podstawowym to 100% punktów, najniższy – 0%. Takie same wyniki (najwyższy i najniższy) uzyskali zdający matematykę na poziomie rozszerzonym.

Tabela 3. Statystyczny opis wyników egzaminu ogółu zdających a typ szkoły

	Liceum ogólnokształcące		Liceum profilowane	
	Arkusz I (% punktów)	*Arkusz II* (% punktów)	*Arkusz I* (% punktów)	*Arkusz II* (% punktów)
Wynik środkowy (mediana)	62	36	34	12
Odchylenie standardowe	21,83	20,01	17,33	13,85
Wynik najczęściej powtarzający się (modalna)	64	28	30	8
Wynik najwyższy	100	100	98	82
Wynik najniższy	0	0	2	2

Wykres 5. Wyniki średnie uzyskane przez zdających za zadania *Arkusza I* i *Arkusza II* a typ szkoły



Zdający lepiej radzili sobie z zadaniami *Arkusza I*, zwłaszcza maturzyści liceów ogólnokształcących. *Arkusz II* okazał się dla absolwentów liceów profilowanych *bardzo trudny*. Maturzyści z liceów ogólnokształcących uzyskali wyższe wyniki, tym niemniej ich osiągnięcia na tegorocznej maturze nie są zadowalające.

4. Wyniki egzaminu z przedmiotu obowiązkowego

Spośród wybierających matematykę na maturze, 93,12% (tj. 9 110 osób) zdawało ją jako przedmiot obowiązkowy.

Tabela 4. Abiturienci zdający matematykę jako przedmiot obowiązkowy

		Liczba abiturientów		Procent abiturientów
Wybrało matematykę na poziomie podstawowym	Liceum ogólnokształcące	2 290	3 798	41,69%
	Liceum profilowane	1 508		
Wybrało matematykę poziomie rozszerzonym	Liceum ogólnokształcące	5 044	5 312	58,31%
	Liceum profilowane	268		

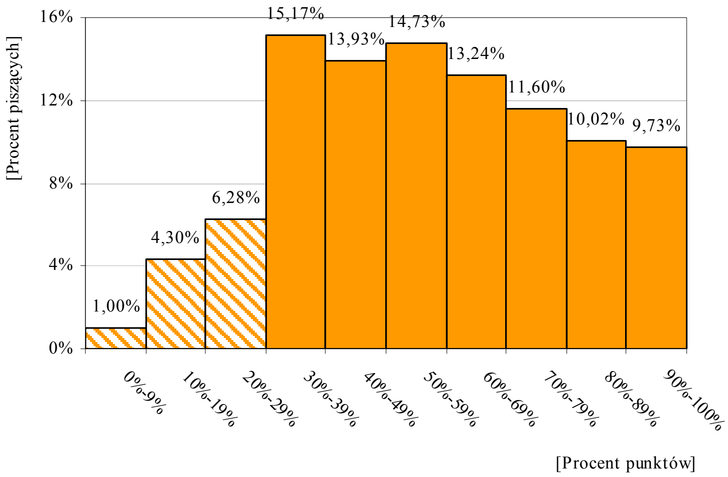
Tabela 5. Statystyczny opis wyników egzaminu z przedmiotu obowiązkowego

	Poziom podstawowy (% punktów)	Poziom rozszerzony (% punktów)
Wynik środkowy (mediana – Me)	56	34
Wynik średni (średnia arytmetyczna – M)	55,98	35,88
Odchylenie standardowe	23,22	20,10

Z wartości średniej arytmetycznej wynika, że matematyka na poziomie podstawowym była dla zdających *umiarkowanie trudna*, a na rozszerzonym – *trudna*.

Wartość mediany wskazuje, że co najmniej połowa zdających[2] uzyskała 56 lub więcej procent punktów. Maturzyści uzyskiwali najczęściej 30% punktów (modalna). Najwyższym wynikiem na poziomie podstawowym było 100% punktów (osiągnęło go 141 osób), natomiast najniższy wynik (2 % punktów) uzyskało 2 zdających.

Wykres 6. Rozkład wyników na poziomie podstawowym dla zdających matematykę jako przedmiot obowiązkowy



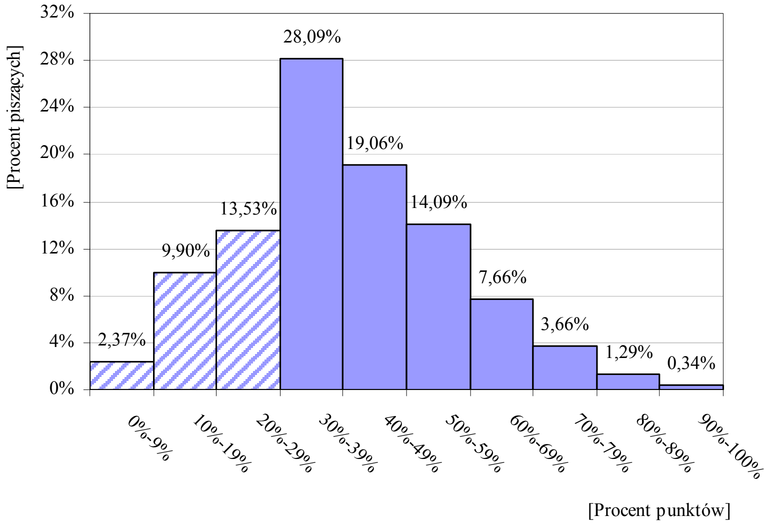
Warunkiem zdania egzaminu było uzyskanie co najmniej 30% punktów możliwych do zdobycia na poziomie podstawowym. Wymagany warunek spełniło 88,42% zdających[3]. Ilustruje to wykres 6.

Rozkład wyników zdających matematykę jako przedmiot obowiązkowy na poziomie podstawowym może być również rozpatrywany ze względu na kontynuowanie (bądź nie) egzaminu na poziomie rozszerzonym oraz ze względu na typ szkoły, do której uczęszczał maturzysta (wykresy 7. – 10.).

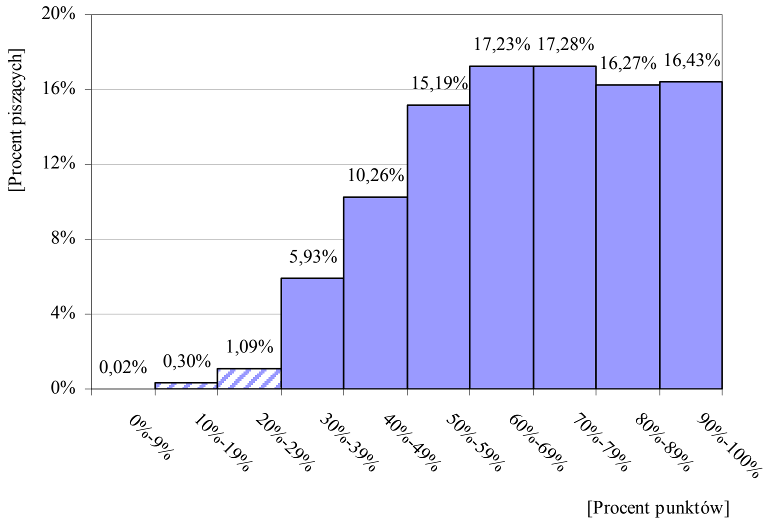
[2] Dokładnie 50,77%.

[3] Egzaminu maturalnego z matematyki nie zdało 1055 osób (tj. 11,58% zdających matematykę jako przedmiot obowiązkowy na poziomie podstawowym).

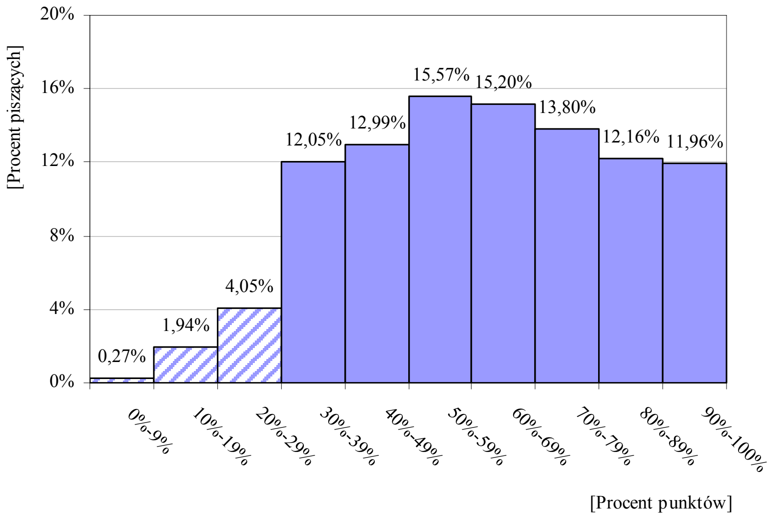
Wykres 7. Rozkład wyników na poziomie podstawowym dla tych abiturientów, którzy **nie** przystąpili do poziomu rozszerzonego egzaminu



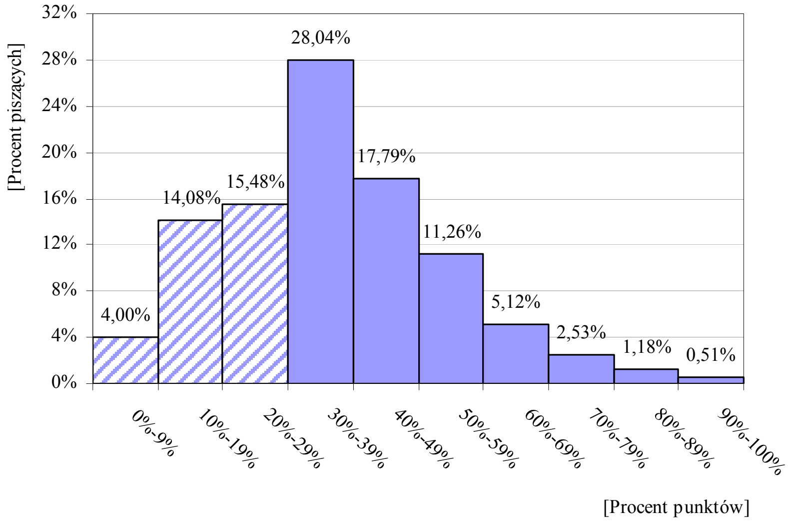
Wykres 8. Rozkład wyników na poziomie podstawowym dla tych abiturientów, którzy przystąpili do poziomu rozszerzonego



Wykres 9. Rozkład wyników na poziomie podstawowym dla abiturientów liceów ogólnokształcących

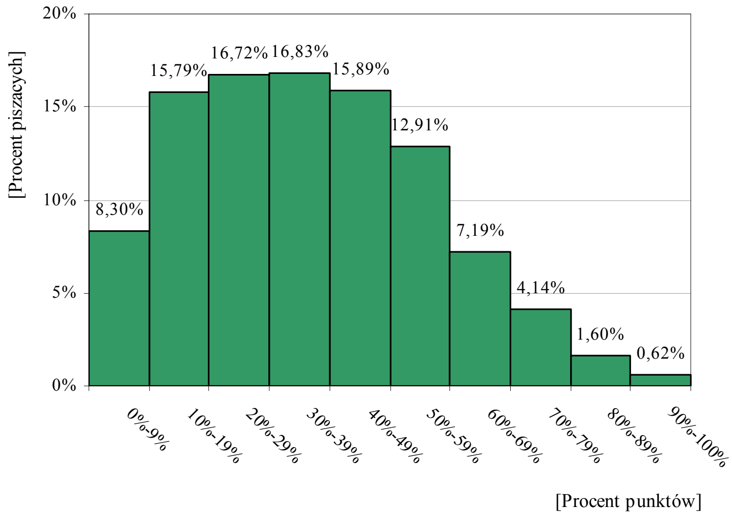


Wykres 10. Rozkład wyników na poziomie podstawowym dla abiturientów z liceów profilowanych



Poziom rozszerzony egzaminu maturalnego z matematyki wybrało 58,31% zdających ten przedmiot jako obowiązkowy.

Wykres 11. Rozkład wyników na poziomie rozszerzonym



Na poziomie rozszerzonym egzamin okazał się dla zdających *trudny*. Osiągnięta średnia arytmetyczna ma wartość tylko 35,88% punktów. Jak widać na wykresie 11., wyniki koncentrują się wokół wartości niższych. Wartość mediany wskazuje, że co najmniej połowa zdających[4] uzyskała 34% punktów lub więcej. Najwyższy wynik (100% punktów) na poziomie rozszerzonym uzyskały 2 osoby, natomiast najniższy (0% punktów) – 40. Najczęściej osiągano wynik rzędu 28% punktów (modalna).

5. Wyniki egzaminu z przedmiotu dodatkowego

Matematyka jako przedmiot dodatkowy zdawana była przez 673 osoby[5] (6,88% wszystkich zdających matematykę). 10 osób spośród nich nie przystąpiło do egzaminu na poziomie rozszerzonym, co skutkowało wynikiem 0% punktów na świadectwie dojrzałości za zadania na tym poziomie.

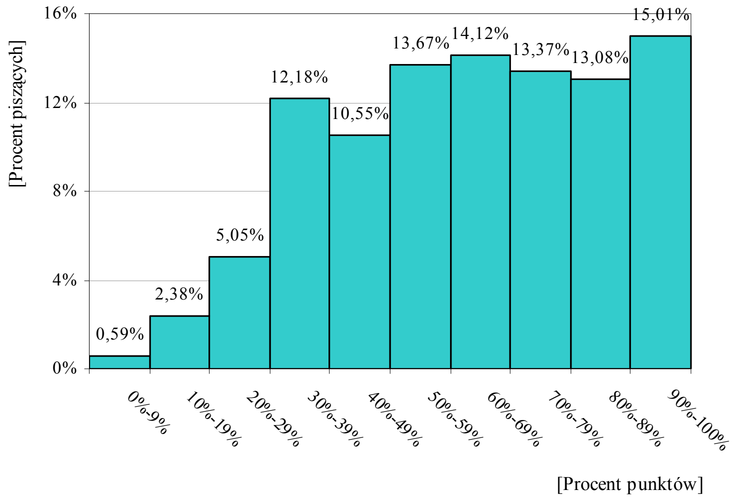
[4] Dokładnie 52,3%.
[5] 637 abiturientów liceów ogólnokształcących i 36 abiturientów liceów profilowanych.

Tabela 6. Statystyczny opis wyników egzaminu z przedmiotu dodatkowego

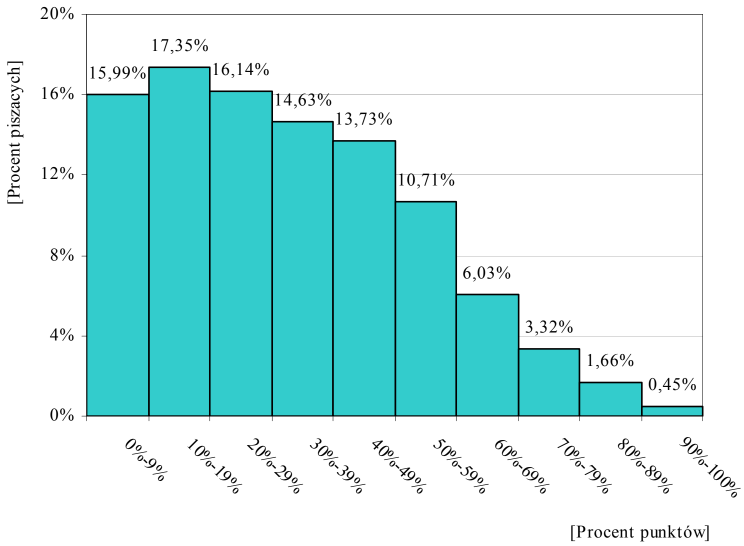
	Poziom podstawowy (% punktów)	Poziom rozszerzony (% punktów)
Wynik środkowy (mediana – Me)	62	30
Wynik średni (średnia arytmetyczna – M)	61,6	31,95
Odchylenie standardowe	23,28	20,83

Dla zdających matematykę jako przedmiot obowiązkowy zadania okazały się *umiarkowanie trudne* na poziomie podstawowym i *trudna* – na rozszerzonym. Bardzo podobny stopień trudności miał egzamin z matematyki, dla tych, którzy wybrali go jako obowiązkowy Najczęstszym wynikiem za *Arkusz I* było 30% punktów, a za *Arkusz II* – 8% punktów.

Wykres 12. Rozkład wyników na poziomie podstawowym



Wykres 13. Rozkład wyników na poziomie rozszerzonym



6. Wyniki egzaminu za standardy

Egzamin sprawdzał opanowanie umiejętności z zakresu standardów dla poziomu podstawowego i rozszerzonego.

Tabela 7. Łatwość standardów na poziomie podstawowym

Umiejętności	Cała populacja	Liceum ogólnokształcące	Liceum profilowane	Egzamin z przedmiotu obowiązkowego	Egzamin z przedmiotu dodatkowego
Wiadomości i rozumienie (I)	0,65	0,69	0,45	0,65	0,70
Korzystanie z informacji (II)	0,56	0,60	0,36	0,55	0,61
Tworzenie informacji (III)	0,52	0,58	0,29	0,52	0,59

Tabela 8. Łatwość standardów na poziomie rozszerzonym

Umiejętności	Cała populacja	Liceum ogólnokształcące	Liceum profilowane	Egzamin z przedmiotu obowiązkowego	Egzamin z przedmiotu dodatkowego
Wiadomości i rozumienie (I)	0,49	0,51	0,17	0,50	0,43
Korzystanie z informacji (II)	0,48	0,49	0,26	0,48	0,44
Tworzenie informacji (III)	0,19	0,20	0,06	0,20	0,17

7. Wyniki egzaminu za zadania

Poniżej w tabeli przedstawiamy łatwość zadań dla zdających na poziomie podstawowym i rozszerzonym.

Tabela 9. Łatwość zadań *Arkusza I*

Numer zadania	Sprawdzana czynność Zdający:	Numer standardu	Zakres treści ze standardu I	Liczba punktów	Wskaźnik łatwości
1.	oblicza prawdopodobieństwa zdarzeń losowych na podstawie definicji klasycznej lub za pomocą drzewa	II.2.a	9.b	2	0,72
	porównuje liczby wymierne	I	1.c	1	0,78
2.	rozwiązuje nierówności związane z funkcją homograficzną	II.2.a	3.h	2	0,68
	wyznacza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym	I	5.a	2	0,54
3.	stosuje twierdzenie Bézout	II.2.a	3.e	2	0,67
	rozkłada wielomian na czynniki i wyznaczyć pierwiastki wielomianu	II.2.a	3.d	2	0,52
4.	podaje opis matematyczny zadania tekstowego stosując własności ciągu geometrycznego	III.1.a	5.b; 3.h	5	0,61
5.	podaje opis matematyczny danej sytuacji w postaci funkcji	III.1.a	3.b	2	0,37
	wykorzystuje własności funkcji kwadratowej do rozwiązywania zadań optymalizacyjnych	II.2.a	3.b	2	0,30
6.	zapisuje w postaci przedziałów liczbowych zbiory opisane za pomocą nierówności z wartością bezwzględną typu $\lvert x-a\rvert < b$	II.2.a	1.h	2	0,66
	wykonuje działania na wyrażeniach algebraicznych, w tym stosować wzór skróconego mnożenia na sześcian różnicy	II.2.a	3.c	1	0,51
	rozwiązuje nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą	II.2.a	3.b	1	
	wyznacza iloczyn i różnicę zbiorów	II.2.a	1.g	2	0,56
7.	przedstawiać dane empiryczne w postaci diagramu	II.2.b	9.c	1	0,96
	oblicza średnią ważoną zbiorów danych	II.2.a	9.c	1	0,83
	oblicza wariancję i odchylenie standardowe danej próby	II.2.a	9.c	3	0,56
8.	korzysta z własności czworokąta wypukłego opisanego na okręgu	II.2.a	6.a	2	0,76

	oblicza pola podstawowych figur płaskich	II.2.c	6.b	2	0,53
	szacuje wyniki obliczeń z zadaną dokładnością i wykonywać obliczenia procentowe	II.2.c	1.i; 1.j	2	0,26
9.	stosuje procent składany w zadaniach również dotyczących oprocentowania lokat	I	5.c	1	0,69
	podaje opis matematyczny danej sytuacji	III.1.a	5.c	2	0,44
10.	wykonuje działania na potęgach o wykładnikach całkowitych	I	1.e	1	0,28
	rozwiązuje algebraicznie układ równań liniowych z dwiema niewiadomymi	II.2.a	3.h	2	0,26
	określa kąt między wysokościami przeciwległych ścian bocznych w ostrosłupie prawidłowym czworokątnym	I	8.a, 8.b	2	0,86
	wyznacza objętość ostrosłupa z zastosowaniem trygonometrii	II.2.a	8.c	5	0,52

Tabela 10. Łatwość zadań *Arkusza II*

Numer zadania	Sprawdzana czynność Zdający:	Numer standardu	Zakres treści ze standardu I	Liczba punktów	Wskaźnik łatwości
11.	wyznacza dziedzinę funkcji logarytmicznej (w tym rozwiązać nierówności wielomianowe)	I	3.c.R	3	0,54
12.	sporządza wykres funkcji trygonometrycznej	III.1.c	4.b	2	0,11
	rozwiązuje równanie trygonometryczne	III.1.b	5.b.R	2	0,12
13.	obliczać prawdopodobieństwa zdarzeń losowych na podstawie definicji klasycznej lub za pomocą drzewa	II.2.R	9.b	1	0,44
	stosuje schemat Bernoulliego do obliczania prawdopodobieństwa	II.2.R	11.c.R	2	0,24
	rozwiązuje nierówności wykładnicze	II.2.R	4.b.R	1	0,12
14.	oblicza sumę n kolejnych wyrazów ciągu arytmetycznego	II.2.R	5.b	4	0,57
	oblicza granicę ciągu liczbowego	II.2.R	6.b.R	1	0,64
15.	zastosowuje przedstawiony algorytm do rozwiązania problemu teoretycznego	II.1.b	8.c.R	4	0,83
16.	wyznacza przekroje płaskie wielościanów	III.1.c	10.a.R	2	0,26
	oblicza pola figur płaskich, m.in. z zastosowaniem funkcji trygonometrycznych	II.2.R	6.b	2	0,09
	stosować własności jednokładności i podobieństwa w rozwiązywaniu zadań	II.2.R	8.d.R	1	0,32
17.	przeprowadza rozumowanie typu matematycznego stosując m.in. wzory skróconego mnożenia	III.2.R	1.e; 3.c	7	0,11
18.	rozwiązuje układ równań z dwiema niewiadomymi, z których przynajmniej jedno jest stopnia drugiego	II.2.a	3.h	3	0,69
	uzasadnia, że czworokąt jest trapezem równoramiennym	III.2.b.R	7.a; 7.b	1	0,59
	wyznacza współrzędne środka i długość promienia okręgu opisanego na czworokącie	II.2.a	9.a.R	3	0,27
	przedstawia okrąg za pomocą równania z dwiema niewiadomymi	I.9.a.R	9.a.R	1	0,35
19.	wyznacza dziedzinę funkcji wymiernej (w tym stosować wzory Viète'a)	III.2.R	3.a.R; 3.c.R	3	0,35
	oblicza pochodne wielomianów i funkcji wymiernych	II.2.R	7.c.R	2	0,43
	stosuje pochodną do rozwiązywania zadań optymalizacyjnych	III.2.R	7.d.R	5	0,17

Tabela 11. Łatwość poszczególnych zadań

Wartość wskaźnika		0 – 0,19	0,20– 0,49	0,50 – 0,69	0,70 – 0,89	0,90 – 1
Interpretacja		bardzo trudne	trudne	umiarkowanie trudne	łatwe	bardzo łatwe
Numery zadań	*Arkusz I*	-	5, 9	2, 3, 4, 6, 7, 8, 10	1	-
	Arkusz II	12, 17	13, 16, 18, 19	11, 14	15	-

8. Analiza jakościowa zadań

Arkusz I

Zadanie 1. (4 pkt)

Umiejętności sprawdzane zadaniem:
- obliczanie prawdopodobieństwa zdarzeń losowych na podstawie definicji klasycznej lub za pomocą drzewa,
- porównywanie liczb wymiernych.

Przykładowy uczniowski zapis rozwiązania:

dokładamy jedną kulę białą: $p_1 = \frac{4}{9}$

usuwamy jedną kulę czarną: $p_2 = \frac{3}{7}$

$p_1 > p_2$

wylosowanie białej kuli jest bardziej prawdopodobne, gdy dołożymy jedną kulę białą.

Najczęściej powtarzające się błędy:
- błędna interpretacja treści zadania,
- nieznajomość własności prawdopodobieństwa,
- brak umiejętności porównywania liczb wymiernych.

	Oceniane czynności	Punktacja	Standard wymagań	Łatwość czynności
1.1	Obliczenie prawdopodobieństwa wylosowania kuli białej spośród 4 kul białych i 5 czarnych	1	II.2.a	0,74
1.2	Obliczenie prawdopodobieństwa wylosowania kuli białej spośród 3 kul białych i 4 czarnych	1	II.2.a	0,71
1.3	Porównanie obliczonych wyników	1	I	0,78

Komentarz

Zadanie okazało się najłatwiejsze w zestawie (p=0,74). Jednocześnie było to najłatwiejsze zadanie w zestawie dla uczniów LO (p=0,79). Najwięcej problemów sprawiała analiza zadania (w swoich rozwiązaniach maturzyści często traktowali doświadczenie losowe jako dwuetapowe i rozwiązywali zadanie metodą drzewa). Zaskakująca była nieznajomość podstawowych własności prawdopodobieństwa – pojawiały się odpowiedzi, w których prawdopodobieństwo było liczbą większą od 1.

Zadanie 2. (4 pkt)

Umiejętności sprawdzane zadaniem:
- rozwiązywanie nierówności związanej z funkcją homograficzną,
- wyznaczanie wyrazów ciągu określonego wzorem ogólnym.

Przykładowy uczniowski zapis rozwiązania:

$\frac{n+2}{3n+1} \rangle \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 2(n+2) \rangle 3$

$-n \rangle -3 \Leftrightarrow n \langle 3 \wedge n \in n=1 \vee n=$
2

$a_1 = \frac{3}{4} \vee a_2 = \frac{4}{7}$

Wyrazy pierwszy i drugi są większe od $\frac{1}{2}$.

Najczęściej powtarzające się błędy:
- udzielanie odpowiedzi tylko na podstawie wypisanych kilku początkowych wyrazów ciągu,
- błędy w obliczaniu wartości wyrazów ciągu,
- błędy w rozwiązywaniu nierówności wymiernej.

	Oceniane czynności	Liczba punktów	Standard wymagań	Łatwość czynności
2.1	Zapisanie nierówności	1	II.2.a	0,88
2.2	Przekształcenie nierówności do postaci liniowej lub iloczynowej	1	II.2.a	0,49
2.3	Rozwiązanie nierówności w zbiorze liczb naturalnych	1	I	0,47
2.4	Sformułowanie odpowiedzi	1	I	0,62

Komentarz

Zadanie okazało się *umiarkowanie trudne* (p=0,61). Wśród rozwiązań najczęściej pojawiało się rozwiązanie polegające na wypisaniu kilku początkowych wyrazów i udzieleniu odpowiedzi bez określenia monotoniczności ciągu (wówczas przyznawano po jednym punkcie w czynnościach 2.1 i 2.4).

Zadanie 3. (4pkt)

Umiejętności sprawdzane zadaniem:
- zastosowanie twierdzenia Bézout,
- rozkładanie wielomianu na czynniki i wyznaczanie pierwiastków wielomianu.

Przykładowy uczniowski zapis rozwiązania:

$W(-2) = 0 \Leftrightarrow -8 + 4k - 4 = 0$

$k = 3$

$(x^3 + 3x^2 - 4) : (x + 2) = x^2 + x - 2$

$\underline{-x^3 - 2x^2}$

$x^2 - 4$

$\underline{-x^2 - 2x}$

$-2x - 4$

$\underline{2x + 4}$

$= \;\; =$

zatem $W(x) = (x^2 + x - 2)(x + 2)$

$W(x) = (x - 1)(x + 2)(x+2)$

Pierwiastki wielomianu to $x = 1$ oraz $x = -2$.

Najczęściej powtarzające się błędy:
- błędy w dzieleniu wielomianu przez dwumian
- brak umiejętności rozkładu wielomianu na czynniki.

	Oceniane czynności	Liczba punktów	Standard wymagań	Łatwość czynności
3.1	Wykorzystanie podzielności wielomianu przez dwumian lub podzielenie wielomianu W(x) przez x + 2	1	II.2.a	0,68
3.2	Wyznaczenie k	1	II.2.a	0,66
3.3	Rozłożenie wielomianu na czynniki	1	II.2.a	0,51
3.4	Podanie pierwiastków wielomianu	1	II.2.a	0,54

Komentarz

Zadanie okazało się *umiarkowanie trudne* (p=0,60). W wielu pracach pojawiały się nieudane próby dzielenia wielomianu $W(x) = x^3 + kx^2 - 4$ przez dwumian $(x + 2)$. W drugiej części zadania niektórzy ze zdających nie zapisali wielomianu w postaci iloczynowej, mimo iż poprawnie dzielili wielomian przez dwumian i odczytywali jego wszystkie pierwiastki.

Zadanie 4. (5 pkt)

Umiejętności sprawdzane zadaniem:

- podanie opisu matematycznego zadania tekstowego przy zastosowaniu własności ciągu geometrycznego i wykorzystanie go do rozwiązania problemu.

Przykładowy uczniowski zapis rozwiązania:

x – liczba płyt na górnej półce, gdzie $x < 24 \wedge x \in N_+$

$(x, 24, y)$ - ciąg geometryczny rosnący o ilorazie $q = \frac{24}{x}$

$y = 24 \cdot \frac{24}{x}$ - liczba płyt ustawionych na dolnej półce

$$x + 24 + y = 76$$

$$x + 24 + \frac{576}{x} = 76$$

$$x^2 + 24x + 576 = 76x$$

$$x^2 - 52x + 576 = 0$$

$$(x_1 = 16 \vee x_2 = 36) \wedge x < 24$$

$$x = 16$$

$$y = 24 \cdot \frac{24}{16} = \frac{576}{16} = 36$$

Na górnej półce jest 16 płyt, zaś na dolnej 36.

Najczęściej powtarzające się błędy:

- stosowanie własności ciągu arytmetycznego zamiast geometrycz-nego,
- brak umiejętności wykorzystania własności ciągu geometrycznego do zapisania zależności wynikających treści zadania,
- błędy w rozwiązywaniu równania (układu równań),
- brak weryfikacji otrzymanego wyniku.

	Oceniane czynności	Liczba punktów	Standard wymagań	Łatwość czynności
4.1	Wprowadzenie oznaczeń wskazujących, że liczby tworzą ciąg geometryczny	1	III.1.a	0,88
4.2	Wykorzystanie sumy trzech wyrazów ciągu i ułożenie równania z jedną niewiadomą	1	III.1.a	0,73
4.3	Przekształcenie równania	1	III.1.a	0,54
4.4	Rozwiązanie równania	1	III.1.a	0,46
4.5	Zapisanie odpowiedzi zgodnie z warunkami zadania	1	III.1.a	0,47

Komentarz

Zadanie okazało się *umiarkowanie trudne* (p=0,61). Pojawiały się rozwiązania, w których maturzyści nie przedstawiali toku rozumowania, a tylko podawali odpowiedź zgodną z warunkami zadania – odgadując iloraz ciągu geometrycznego i podając kolejne wyrazy tego ciągu.

Zadanie 5. (4 pkt)

Umiejętności sprawdzane zadaniem:
- podanie opisu matematycznego danej sytuacji w postaci funkcji,
- wykorzystywanie własności funkcji kwadratowej do rozwiązywania zadań optymalizacyjnych.

Przykładowy uczniowski zapis rozwiązania:

x – liczba kolejnych obniżek ceny jednej kurtki
$(60 - x)$ – zysk ze sprzedaży jednej kurtki
$(40 + x)$ – liczba sprzedanych kurtek

określenie funkcji f opisującej miesięczny zysk
$$f(x) = (60 - x)(40 + x)$$

ta funkcja kwadratowa przyjmuje największą wartość dla argumentu $x_w = \frac{60-40}{2} = 10$
zatem cena kurtki powinna wynosić 160 – 10, czyli 150 złotych.

Najczęściej powtarzające się błędy:

- brak umiejętności opisu matematycznego danej w zadaniu sytuacji,
- budowanie funkcji przychodu zamiast zysku,
- udzielanie odpowiedzi na podstawie obliczenia kilku kolejnych wartości zysku lub przychodu.

	Oceniane czynności	Liczba punktów	Standard wymagań	Łatwość czynności
5.1	Analiza zadania, wprowadzenie oznaczeń	1	III.1.a	0,52
5.2	Określenie funkcji opisującej miesięczny zysk	1	III.1.a	0,21
5.3	Wyznaczenie wartości argumentu, dla którego funkcja przyjmuje największą wartość	1	II.2.a	0,29
5.4	Wyznaczenie szukanej ceny	1	II.2.a	0,31

Komentarz

Zadanie okazało się *trudne* (p=0,34) i było najtrudniejszym dla zdających zadaniem w zestawie. Jednocześnie okazało się najtrudniejszym zadaniem w zestawie dla uczniów LO (p=0,37). Niewielu zdających podjęło próby rozwiązania tego zadania, najczęściej poprzestawali oni na analizie treści zadania i wprowadzeniu oznaczeń.

Zadanie 6. (6 pkt)

Umiejętności sprawdzane zadaniem:
- zapisywanie w postaci przedziałów liczbowych zbiorów opisanych za pomocą nierówności z wartością bezwzględną typu $|x-a|<b$,
- wykonywanie działań na wyrażeniach algebraicznych, w tym stosowanie wzoru skróconego mnożenia na sześcian różnicy,
- rozwiązywanie nierówności kwadratowych z jedną niewiadomą,
- wyznaczanie iloczynu i różnicy zbiorów.

Przykładowy uczniowski zapis rozwiązania:

$|x+2|\langle 3 \Leftrightarrow -3-2\langle x \langle 3-2 \Leftrightarrow x \in (-5;1)$

$A = (-5;1)$

$(2x-1)^3 \le 8x^3 - 13x^2 + 6x + 3$

$(2x)^3 - 3\cdot(2x)^2 \cdot 1 + 3\cdot 2x \cdot 1 - 1^3 \le 8x^3 - 13x^2 + 6x + 3$

$8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 \le 8x^3 - 13x^2 + 6x + 3$

$x^2 - 4 \le 0 \Leftrightarrow x \in \langle -2;2\rangle$

$B = \langle -2;2\rangle$

$A \cap B = \langle -2;1)$ $\qquad B - A = \langle 1;2\rangle$.

Najczęściej powtarzające się błędy:

- błędy w rozwiązywaniu nierówności z wartością bezwzględną,
- błędne stosowanie wzoru na sześcian różnicy,
- niepoprawne rozwiązywanie nierówności kwadratowej,
- błędy w wyznaczaniu różnicy zbiorów (np. domknięcia przedziału).

Oceniane czynności		Liczba punktów	Standard wymagań	Łatwość czynności
6.1	Rozwiązanie nierówności z wartością bezwzględną i wyznaczenie zbioru *A*	2	II.2.a	0,66
6.2	Rozwiązanie nierówności wielomianowej i wyznaczenie zbioru *B*	2	II.2.a	0,51
6.3	Wyznaczenie iloczynu zbiorów	1	II.2.a	0,63
6.4	Wyznaczenie różnicy zbiorów	1	II.2.a	0,48

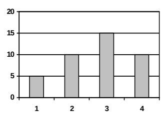
Komentarz

Największym problemem dla zdających okazało się poprawne wykorzystanie wzoru na sześcian różnicy oraz wyznaczenie różnicy zbiorów. Zapewne, dlatego, mimo iż zadanie sprawdzało typowe dla szkoły średniej umiejętności (rozwiązywanie elementarnej nierówności z wartością bezwzględną, wyznaczanie iloczynu i różnicy zbiorów) okazało się ono *umiarkowanie trudne* (p=0,58).

Zadanie 7. (5 pkt)

Umiejętności sprawdzane zadaniem:
- przedstawianie danych empirycznych w postaci diagramu,
- obliczanie średniej ważonej zbioru danych,
- obliczanie wariancji i odchylenia standardowego danej próby.

Przykładowy uczniowski zapis rozwiązania:



średnia liczba godzin: $\frac{5 + 20 + 45 + 40}{40} =$ 2,75

wariancja:

$$\frac{5(1-2{,}75)^2 + 10(2-2{,}75)^2 + 15(3-2{,}75)^2 + 10(4-2{,}75)^2}{40} \approx$$

$\approx 0{,}94$

odchylenie standardowe: $\sqrt{0{,}94} \approx 0{,}97$.

Najczęściej powtarzające się błędy:

- błędy w stosowaniu wzoru na średnią ważoną i wariancję,
- mylenie pojęcia wariancji i odchylenia standardowego,
- błędy rachunkowe.

Oceniane czynności		Liczba punktów	Standard wymagań	Łatwość czynności
7.1	Naszkicowanie diagramu	1	II.2.b	0,96
7.2	Obliczenie średniej liczby godzin	1	II.2.a	0,83
7.3	Obliczenie wariancji	2	II.2.a	0,41
7.4	Obliczenie odchylenia standardowego	1	II.2.a	0,84

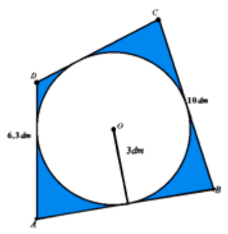
Komentarz

Mimo iż zadanie tego typu było znane zdającym z matury próbnej, to okazało się *umiarkowanie trudne* o współczynniku łatwości 0,69. Jednocześnie było to najłatwiejsze zadanie w zestawie dla uczniów LP (p=0,58). Maturzyści nie mieli problemu z narysowaniem diagramu i obliczeniem średniej, nie potrafili natomiast poprawnie skorzystać ze wzoru na wariancję umieszczonego w zestawie wzorów matematycznych.

Zadanie 8. (6 pkt)

Umiejętności sprawdzane zadaniem:
- korzystanie z własności czworokąta wypukłego opisanego na okręgu,
- obliczanie pól podstawowych figur płaskich,
- szacowanie wyników obliczeń z zadaną dokładnością i wykonywanie obliczeń procentowych.

Przykładowy uczniowski zapis rozwiązania:



$|AB| + |CD| = |AD| + |BC| = 16{,}3\ dm,$

$P_{ABCD} = \frac{1}{2}(6{,}3 + 10 + 6{,}3 + 10) \cdot 3 = 48{,}9 dm^2$

$P_K = 9\pi \approx 28{,}26 dm^2$

$P_R \approx 48{,}9 - 28{,}26 = 20{,}64$

$\frac{P_R}{P_{ABCD}} 100\% \approx 42{,}21\%$

Najczęściej powtarzające się błędy:

- błędy w obliczaniu pola czworokąta (obliczanie pola trapezu, deltoidu),
- obliczanie obwodu zamiast pola,
- błędy rachunkowe.

	Oceniane czynności	Liczba punktów	Standard wymagań	Łatwość czynności
8.1	Wykorzystanie warunku dla czworokąta opisanego na okręgu	2	II.2.a	0,76
8.2	Obliczenie pola czworokąta	1	II.2.c	0,21
8.3	Obliczenie pola koła	1	II.2.c	0,85
8.4	Obliczenie pola niewykorzystanej części materiału	1	II.2.c	0,27
8.5	Obliczenie, ile procent całego materiału stanowi jego niewykorzystana część (z odpowiednią dokładnością)	1	II.2.c	0,26

Komentarz

Zadanie okazało się *umiarkowanie trudne* (p=0,52). Zdający potrafili zapisać warunek dla czworokąta opisanego na okręgu i obliczyć pole koła. Problemem było obliczenie pola czworokąta – tu najczęściej maturzyści korzystali ze wzoru na pole trapezu lub deltoidu. Niewielu zdających wykazało się znajomością wzoru na pole czworokąta opisanego na okręgu.

Zadanie 9. (6 pkt)

Umiejętności sprawdzane zadaniem:
- stosowanie procentu składanego w zadaniach dotyczących oprocentowania lokat,
- podanie opisu matematycznego danej sytuacji,
- wykonywanie działań na potęgach o wykładnikach całkowitych,
- rozwiązywanie algebraicznie układ równań liniowych z dwiema niewiadomymi.

Przykładowy uczniowski zapis rozwiązania:	**Najczęściej powtarzające się błędy:**
x – kwota wpłacona dla dziecka ośmioletniego y – kwota wpłacona dla dziecka dziesięcioletniego $\begin{cases} x+y=84100 \\ x\left(1+\frac{1}{20}\right)^{13}=y\left(1+\frac{1}{20}\right)^{11} \end{cases}$ $\begin{cases} x+y=84100 \\ x\left(1+\frac{1}{20}\right)^{2}=y \end{cases}$ $\begin{cases} x+y=84100 \\ 1{,}1025x=y \end{cases}$ $\begin{cases} y=84100-x \\ 1{,}1025x=84100-x \end{cases}$ $\begin{cases} y=84100-x \\ 2{,}1025x=84100 \end{cases}$ $\begin{cases} y=84100-x \\ x=40000 \end{cases}$ $\begin{cases} x=40000 \\ y=44100 \end{cases}$ Dla dziecka ośmioletniego trzeba wpłacić 40000 zł, a dla dziecka dziesięcioletniego 44100 zł.	▪ niewłaściwa interpretacja treści zadania, ▪ stosowanie wzoru na procent składany w stosunku do pełnej kwoty, bez uwzględnienia podziału między dzieci, ▪ błędy w rozwiązywaniu układu równań, ▪ błędy rachunkowe, ▪ brak weryfikacji otrzymanego wyniku.

	Oceniane czynności	Liczba punktów	Standard wymagań	Łatwość czynności
9.1	Analiza zadania, wprowadzenie oznaczeń i zapisanie zależności	1	III.1.a	0,58
9.2	Zastosowanie w obliczeniach procentu składanego	1	I	0,69
9.3	Ułożenie układu równań: $\begin{cases} x+y=84100 \\ x\left(1+\frac{1}{20}\right)^{13}=y\left(1+\frac{1}{20}\right)^{11} \end{cases}$	1	III.1.a	0,31
9.4	Przekształcenie układu równań: $\begin{cases} x+y=84100 \\ x\left(1+\frac{1}{20}\right)^{2}=y \end{cases}$	1	I	0,28
9.5	Rozwiązanie układu równań i sformułowanie odpowiedzi	2	II.2.a	0,26

Komentarz

Niewielu zdających podjęło próbę rozwiązania tego zadania. Okazało się ono *trudne* (p= 0,39) i było najtrudniejszym zadaniem w zestawie dla uczniów LP (p=0,18). Maturzyści z reguły nie mieli problemu z zauważeniem, że w zadaniu należy zastosować procent składany, ale w większości nie potrafili poprawnie zinterpretować treści zadania i zbudować układu równań.

Zadanie 10. (7 pkt)

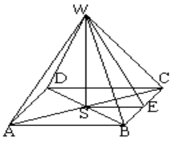
Umiejętności sprawdzane zadaniem:

- określanie kąta między wysokościami przeciwległych ścian bocznych w ostrosłupie prawidłowym czworokątnym,
- wyznaczanie objętość ostrosłupa z zastosowaniem trygonometrii.

Przykładowy uczniowski zapis rozwiązania:

a – długość krawędzi podstawy ostrosłupa,
H – długość wysokości ostrosłupa,

$\alpha = |\angle SWE|$



z warunków zadania wynika, że:

$$\sin\alpha = \frac{|SE|}{|WE|} = \frac{\frac{1}{2}a}{h} \Leftrightarrow a = 2h\sin\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{|WS|}{|WE|} = \frac{H}{h} \Leftrightarrow H = h\cos\alpha$$

$$P_p = a^2 = 4h^2\sin^2\alpha$$

$$V = \frac{1}{3}P_p H = \frac{4}{3}h^3\sin^2\alpha\cos\alpha\ .$$

Najczęściej powtarzające się błędy:

- zaznaczenie na rysunku niewłaściwego kąta,
- nieznajomość definicji funkcji trygonometrycznych w trójkącie prostokątnym,
- wprowadzanie własnych wartości kąta lub wysokości (najczęściej $\alpha = 60^0$),
- błędy w przekształcaniu wyrażeń zawierających funkcje trygonometryczne.

Oceniane czynności		Liczba punktów	Standard wymagań	Łatwość czynności
10.1	Sporządzenie rysunku z oznaczeniami lub wprowadzenie dokładnie opisanych oznaczeń	1	I	0,92
10.2	Zaznaczenie na rysunku właściwego przekroju i właściwego kąta	1	I	0,80
10.3	Wykorzystanie własności trójkąta równoramiennego o wysokości będącej wysokością ostrosłupa	1	II.2.a	0,78
10.4	Obliczenie długości wysokości ostrosłupa	1	II.2.a	0,46
10.5	Obliczenie długości krawędzi podstawy	1	II.2.a	0,43
10.6	Obliczenie pola podstawy i objętości ostrosłupa	2	II.2a	0,46

Komentarz

Zadanie okazało się *umiarkowanie trudne* (p=0,61). Część zdających ograniczyła się do wykonania czynności 10.1 – 10.3, nie umiała natomiast wykorzystać definicji funkcji trygonometrycznych do przedstawienia długości wysokości ostrosłupa i długości krawędzi podstawy za pomocą wielkości danych w zadaniu. Maturzyści, którzy wprowadzali własne wartości liczbowe (miarę kąta i długość wysokości) z reguły nie mieli problemu z rozwiązaniem zadania.

Arkusz II

Zadanie 11. (3 pkt)

Umiejętności sprawdzane zadaniem

- wyznaczanie dziedziny funkcji logarytmicznej (w tym rozwiązywanie nierówności wielomianowych).

Przykładowy uczniowski zapis rozwiązania:

1) założenie o liczbie logarytmowanej

$x^3 + 4x^2 - x - 4 \rangle 0 \Leftrightarrow (x+4)(x^2-1) \rangle 0$

$\Leftrightarrow x \in (-4;-1) \cup (1;\infty)$

2) założenia o podstawie logarytmu

$x^2 - 3 \rangle 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty;-\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3};\infty)$

$x^2 - 3 \neq 1 \Leftrightarrow x^2 \neq 4 \Leftrightarrow x \in R - \{-2;2\}$

3) dziedzina funkcji

$x \in (-4;-1) \cup (1;\infty) \wedge x \in (-\infty;-\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3};\infty) \wedge x \in R - \{-2;2\}$

$\Leftrightarrow x \in (-4;-2) \cup (-2;-\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3};2) \cup (2;\infty)$

$D = (-4;-2) \cup (-2;-\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3};2) \cup (2;\infty)$.

Najczęściej powtarzające się błędy:

- brak założenia $x^2 - 3 \neq 1$,
- błędy w rozwiązywaniu nierówności wielomianowej,
- błędy w wyznaczaniu części wspólnej zbiorów,
- błędy w zapisie spójników logicznych.

Oceniane czynności		Liczba punktów	Standard wymagań	Łatwość czynności
11.1	Wyznaczenie zbioru argumentów, dla których liczba logarytmowana jest dodatnia	1	I	0,61
11.2	Wyznaczenie zbioru argumentów, dla których podstawa logarytmu jest dodatnia i różna od 1	1	I	0,47
11.3	Wyznaczenie dziedziny funkcji	1	I	0,52

Komentarz

Zadanie okazało się dla zdających *umiarkowanie trudne* (p=0,54). Zaskakujące na poziomie rozszerzonym były: brak umiejętności korzystania z definicji logarytmu (znajdującej się w zestawie wzorów) dla określenia dziedziny funkcji, błędy w rozwiązywaniu elementarnej nierówności kwadratowej $x^2 - 3 \rangle 0$ i błędy w wyznaczaniu części wspólnej zbiorów.

Zadanie 12. (4 pkt)	
Umiejętności sprawdzane zadaniem: - sporządzanie wykresu funkcji trygonometrycznej, - rozwiązywanie równań trygonometrycznych.	
Przykładowy uczniowski zapis rozwiązania:	**Najczęściej powtarzające się błędy:**

a)

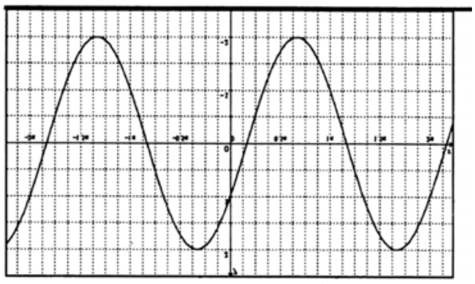
$f(x)=\cos x-\sqrt{3}\sin x$

$f(x)=2\left(\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)$

$f(x)=2\left(\sin\frac{\pi}{6}\cos x-\cos\frac{\pi}{6}\sin x\right)$

$f(x)=2\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$

$f(x)=-2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$



b)

$\cos x$

$\cos x$

$\cos x$

$\cos\frac{\pi}{3}$

$\cos\Big($

$\frac{\pi}{3}+x$

$x=2$

Najczęściej powtarzające się błędy:

- błędy w obliczaniu współrzędnych punktów należących do wykresu funkcji,
- stosowanie błędnych podstawień np.:
  $\cos x=1-\sin^2 x$, $\sin x=\sqrt{1-\cos^2 x}$,
- błędy w stosowaniu wzorów skróconego mnożenia np.:
  $\left(\cos x-\sqrt{3}\sin x\right)^2=\cos^2 x-3\sin^2 x$,
- błędne rozwiązywanie elementarnych równań trygonometrycznych np.:
  $\sin x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}$.

	Oceniane czynności	Liczba punktów	Standard wymagań	Łatwość czynności
12.1	Przedstawienie metody szkicowania wykresu	1	III.1.c	0,15
12.2	Narysowanie wykresu	1	III.1.c	0,07
12.3	Rozwiązanie równania (metoda – 1 pkt, rozwiązanie – 1 pkt)	2	III.1.b	0,12

Komentarz

Zadanie okazało się dla zdających *bardzo trudne* (współczynnik łatwości p=0,12). Uczniowie najczęściej podejmowali próby szkicowania wykresu poprzez wyznaczanie kolejnych wartości funkcji (zazwyczaj dla $0;\frac{\pi}{2};\pi;\frac{3\pi}{2};2\pi$). Rozwiązując równanie trygonometryczne zdający często wykorzystywali związek: $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ i budowali układ równań, inni rozwiązanie równania odczytywali z wcześniej sporządzonego wykresu.

Zadanie 13. (4 pkt)

Umiejętności sprawdzane zadaniem:
- obliczanie prawdopodobieństwa zdarzeń losowych na podstawie definicji klasycznej lub za pomocą drzewa,
- stosowanie schematu Bernoulliego do obliczania prawdopodobieństwa,
- rozwiązywanie nierówności wykładniczych.

Przykładowy uczniowski zapis rozwiązania:

$$p = \frac{1}{6}, q = \frac{5}{6}, k \geq 1$$

$$P_n\left(k \geq 1\right) = 1 - P_n\left(k = 0\right) = = 1 - \binom{n}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^n = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

$$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n \langle \frac{671}{1296}$$

$$-\left(\frac{5}{6}\right)^n \langle \frac{671}{1296} - 1$$

$$\left(\frac{5}{6}\right)^n \rangle \frac{625}{1296} = \left(\frac{5}{6}\right)^4$$

$$n \langle 4 \wedge n \in N_+$$

$$n \in \left\{1,2,3\right\}$$

Najczęściej powtarzające się błędy:

- błędna interpretacja treści zadania,
- błędy w wyznaczeniu prawdopodobieństwa sukcesu p i liczby sukcesów k w schemacie Bernoulliego,
- błędy w rozwiązywaniu nierówności wykładniczej.

Oceniane czynności		Liczba punktów	Standard wymagań	Łatwość czynności
13.1	Obliczenie prawdopodobieństwa otrzymania w jednym rzucie tej samej liczby oczek na obu kostkach	1	II.2.R	0,44
13.2	Wykorzystanie schematu Bernoulliego i określenie: p, q, N, k	1	II.2.R	0,29
13.3	Obliczenie prawdopodobieństwa otrzymania w n rzutach co najmniej raz tej samej liczby oczek na obu kostkach	1	II.2.R	0,18
13.4	Rozwiązanie nierówności wykładniczej i sformułowanie odpowiedzi	1	II.2.R	0,12

Komentarz

Zadanie okazało się dla zdających *trudne* (p=0,26). Najwięcej problemu sprawił wybór poprawnej metody rozwiązania, a następnie rozwiązanie nierówności wykładniczej (zwłaszcza zmiana znaku nierówności na przeciwny).

Zadanie 14. (5 pkt)	
Umiejętności sprawdzane zadaniem: - obliczanie sumy n kolejnych wyrazów ciągu arytmetycznego, - obliczanie granicy ciągu liczbowego.	
Przykładowy uczniowski zapis rozwiązania: $a_1 = 1, r = 3, a_n = 3n-2, S_n = \frac{a_1+a_n}{2}n$ $1+4+7+...+(3n-2) = \frac{1+(3n-2)}{2}n = \frac{3n^2-n}{2}$ $a_1 = 5, r = 2, a_n = 2n+3, S_n = \frac{a_1+a_n}{2}n$ $5+7+9+...+(2n+3) = \frac{5+(2n+3)}{2}n = \frac{2n^2+8n}{2}$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+4+7+...+(3n-2)}{5+7+9+...+(2n+3)} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2-n}{2n^2+8n} = \frac{3}{2}$	**Najczęściej powtarzające się błędy:** ▪ błędy w wykorzystaniu wzoru na sumę ciągu arytmetycznego, ▪ błędy w obliczaniu granicy np.: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+4+7+...+(3n-2)}{5+7+9+...+(2n+3)} =$ $= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}+\frac{4}{n}+\frac{7}{n}+...+\frac{3n-2}{n}}{\frac{5}{n}+\frac{7}{n}+\frac{9}{n}+...+\frac{2n+3}{n}}$.

	Oceniane czynności	Liczba punktów	Standard wymagań	Łatwość czynności
14.1	Wyznaczenie a_1, r, S_n, jeśli $a_n = 3n - 2$	2	II.2.R	0,58
14.2	Wyznaczenie a_1, r, S_n, jeśli $a_n = 2n + 3$	2	II.2.R	0,56
14.3	Obliczenie granicy	1	II.2.R	0,64

Komentarz

Zadanie okazało się dla zdających *umiarkowanie trudne* (p=0,58). Nie wszyscy dostrzegali potrzebę obliczenia sum ciągów arytmetycznych. Większość maturzystów wykazała się umiejętnością obliczania granicy $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n-2}{2n+3}$ lub $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2-n}{2n^2+8n}$. W swoich rozwiązaniach zdający nie odwoływali się do twierdzenia Stolza, mimo to często pojawiał się zapis: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+4+7+...+(3n-2)}{5+7+9+...+(2n+3)} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n-2}{2n+3}$.

Zadanie 15. (4 pkt)

Umiejętności sprawdzane zadaniem:

- zastosowanie przedstawionego algorytmu do rozwiązania problemu teoretycznego.

Przykładowy uczniowski zapis rozwiązania:

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN}$

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}$

$2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}$

Ponieważ $\overrightarrow{MD} = -\overrightarrow{MA}$

oraz $\overrightarrow{CN} = -\overrightarrow{BN}$ to

$2\overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}$

$2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}\right)$

odcinek łączący środki ramion trapezu jest równoległy do podstaw trapezu, a jego długość jest połową sumy długości podstaw tego trapezu.

Najczęściej powtarzające się błędy:

- niepoprawna lub niepełna interpretacja wyniku,
- prowadzenie analogicznego rozumowania, w którym pojawia się długość wektora,
- błędy w zapisie wektorów przeciwnych np.: $\overrightarrow{CN} = -\overrightarrow{NB}$.

Oceniane czynności		Liczba punktów	Standard wymagań	Łatwość czynności
15.1	Zapisanie wektora $\overrightarrow{MN}$ jako sumy odpowiednich wektorów	1	II.1.b	0,87
15.2	Dodanie równości stronami	1	II.1.b	0,90
15.3	Przekształcenie wyniku do prostej postaci: $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}\right)$	1	II.1.b	0,84
15.4	Zinterpretowanie otrzymanego wyniku	1	II.1.b	0,70

Komentarz

To zadanie okazało się dla zdających najłatwiejsze w zestawie (p=0,83). Zastosowanie przedstawionego algorytmu nie przysporzyło zdającym trudności, interpretując wynik zdający najczęściej zapominali o równoległości odcinka łączącego środki ramion trapezu do obu podstaw trapezu.

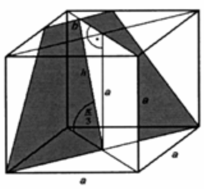
Zadanie 16. (5 pkt)

Umiejętności sprawdzane zadaniem:

- wyznaczanie przekrojów płaskich wielościanów,
- obliczanie pól figur płaskich, m.in. z zastosowaniem funkcji trygonometrycznych, stosowanie własności jednokładności i podobieństwa w rozwiązywaniu zadań.

Przykładowy uczniowski zapis rozwiązania:

$\frac{\pi}{3} \rangle 55^{o} \Rightarrow$ przekrój jest trapezem



$a\sqrt{2}, b$ - długości podstaw trapezu;

h - długość wysokości trapezu

Najczęściej powtarzające się błędy:

- błędnie wyznaczony przekrój (trójkąt, trójkąt równoboczny, prostokąt),
- źle zaznaczony kąt $\frac{\pi}{3}$,
- błędy w wyznaczaniu długości krótszej podstawy trapezu,
- niepoprawne przekształcenia wyrażeń algebraicznych.

$$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{a}{h} \Rightarrow h = \frac{a}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{a}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{3}a}{3}$$

$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{x}{h} \Rightarrow x = \frac{1}{2}h = \frac{\sqrt{3}}{3}a$$

z podobieństwa trójkątów:

$$\frac{a\sqrt{2}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{b}{\frac{a\sqrt{2}}{2} - x}$$

$$\frac{2}{1} = \frac{b}{\frac{a\sqrt{2}}{2} - \frac{a\sqrt{3}}{3}}$$

$$b = a\sqrt{2} - \frac{2a\sqrt{3}}{3} = \frac{3a\sqrt{2} - 2a\sqrt{3}}{3}$$

$$P = \frac{a\sqrt{2} + b}{2}h = \frac{\frac{6a\sqrt{2} - 2a\sqrt{3}}{3}}{2}\frac{2a\sqrt{3}}{3} =$$

$$\frac{\frac{6a^2\sqrt{6} - 6a^2}{3}}{3} = \frac{2a^2\left(\sqrt{6} - 1\right)}{3}$$

Oceniane czynności		Liczba punktów	Standard wymagań	Łatwość czynności
16.1	Sporządzenie rysunku wraz z oznaczeniami i zaznaczenie kąta nachylenia	2	III.1.c	0,26
16.2	Obliczenie długości wysokości trapezu	1	II.2.R	0,13
16.3	Obliczenie długości krótszej podstawy trapezu	1	II.2.R	0,05
16.4	Obliczenie pola trapezu	1	II.2.R	0,32

Komentarz

Zadanie okazało się dla zdających *trudne* (p=0,20). Problemem było wyznaczenie odpowiedniego przekroju i obliczenie długości krótszej podstawy trapezu. W niewielu pracach pojawiło się uzasadnienie, że opisywanym warunkami zadania przekrojem jest trapez.

Zadanie 17. (7 pkt)

Umiejętności sprawdzane zadaniem:
- przeprowadzanie rozumowania typu matematycznego z zastosowaniem m.in. wzorów skróconego mnożenia.

Przykładowy uczniowski zapis rozwiązania:

$$x = \sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$$

$$x^3 = \left(\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}\right)^3$$

$$\left(\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}\right)^3 =$$

$$\left(\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}\right)^3 - 3\left(\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}\right)^2\left(\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}\right) +$$

$$+ 3\left(\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}\right)^2\left(\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}\right) - \left(\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}\right)^3 =$$

$$= 5\sqrt{2}+7 - 3\left(\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}\right)\left(\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}\right)\left[\left(\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}\right) - \left(\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}\right)\right] +$$

$$-\left(5\sqrt{2}-7\right) = 14 - 3\sqrt[3]{50-49}\left[\left(\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}\right) - \left(\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}\right)\right] =$$

$$= 14 - 3\left[\left(\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}\right) - \left(\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}\right)\right]$$

zatem

$$x^3 = 14 - 3x \Leftrightarrow x^3 + 3x - 14 = 0$$

$$(x-2)\left(x^2 + 2x + 7\right) = 0$$

$$x - 2 = 0 \vee x^2 + 2x + 7 = 0$$

$$(x = 2 \vee x \in \varnothing) \Leftrightarrow x = 2$$

czyli $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7} = 2$

Najczęściej powtarzające się błędy:

- błędy w stosowaniu wzorów skróconego mnożenia,
- błędy w wykonywaniu działań na pierwiastkach i potęgach.

	Oceniane czynności	Liczba punktów	Standard wymagań	Łatwość czynności
17.1	Wprowadzenie oznaczeń	1	III.2.R	0,19
17.2	Skorzystanie z tożsamości	1	III.2.R	0,17
17.3	Skorzystanie z tożsamości i oznaczeń do uzyskania równania z jedną niewiadomą	2	III.2.R	0,09
17.4	Wyznaczenie pierwiastka całkowitego równania	1	III.2.R	0,08
17.5	Zapisanie równania w postaci iloczynowej	1	III.2.R	0,08
17.6	Wykazanie, że $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$ jest liczbą całkowitą	1	III.2.R	0,08

Komentarz

Najtrudniejsze dla zdających zadanie w całym zestawie (p=0,11). Niewielu maturzystów podjęło próbę rozwiązania tego zadania, z reguły stosowali oni metodę polegającą na przedstawieniu wyrażeń podpierwiastkowych w postaci sześcianu sumy bądź różnicy wyrażeń.

Zadanie 18. (8 pkt)

Umiejętności sprawdzane zadaniem:
- rozwiązywanie układu równań z dwiema niewiadomymi, z których przynajmniej jedno jest stopnia drugiego,
- uzasadnianie, że czworokąt jest trapezem równoramiennym,
- wyznaczanie współrzędnych środka i długości promienia okręgu opisanego na czworokącie,
- przedstawianie okręgu za pomocą równania z dwiema niewiadomymi.

Oceniane czynności		Liczba punktów	Standard wymagań	Łatwość czynności
18.1	Doprowadzenie układu do równania jednej zmiennej i rozwiązanie	2	II.2.a	0,72
18.2	Wyznaczenie współrzędnych wierzchołków czworokąta	1	II.2.a	0,63
18.3	Uzasadnienie, że czworokąt jest trapezem równoramiennym	1	III.2.b.R	0,59
18.4	Wyznaczenie równania symetralnej	1	II.2.a	0,28
18.5	Wyznaczenie współrzędnych środka okręgu	1	II.2.a	0,26
18.6	Obliczenie długości promienia okręgu	1	II.2.a	0,27
18.7	Zapisanie równania okręgu	1	I.9.a.R	0,35

Komentarz

Zadanie okazało się dla zdających *trudne* (p=0,28). Nie mieli oni z reguły problemu z rozwiązaniem układu równań i wyznaczeniem współrzędnych wierzchołków czworokąta, potrafili wykazać, że czworokąt jest trapezem równoramiennym. Niewielu zdających podejmowało jednak próby wyznaczenia równania okręgu opisanego na czworokącie.

Przykładowy uczniowski zapis rozwiązania:	**Najczęściej powtarzające się błędy:**
a) $\begin{cases} -4x^2+y^2+2y+1=0 \\ -x^2+y+4=0 \end{cases}$ $\begin{cases} y+4=x^2 \\ -4(y+4)+y^2+2y+1=0 \end{cases}$ $y^2-2y-15=0$ $\Delta=64$ $y_1=-3 \vee y_2=5$ $\begin{cases} y=-3 \\ x^2=1 \end{cases} \vee \begin{cases} y=5 \\ x^2=9 \end{cases}$ $A=(-1;-3), B=(1;-3), C=(3;5), D=(-3;5)$ b) prosta AB: $y=-3$ prosta CD: $y=5$ $\lvert AD\rvert=\sqrt{(-2)^2+8^2}=\sqrt{68}$ $\lvert BC\rvert=\sqrt{2^2+8^2}=\sqrt{68}$ Czworokąt $ABCD$ jest trapezem równoramiennym: $AB \parallel CD \wedge \lvert AD\rvert=\lvert BC\rvert=\sqrt{68}$ c) prosta BC: $y=ax+b$ $\begin{cases} a+b=-3 \\ 3a+b=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=-7 \end{cases}$ $y=4x-7$ środek odcinka $\overline{BC}$: $S_{BC}=(2;1)$ symetralna BC: $y=ax+b$ z warunku prostopadłości: $a=-\frac{1}{4}$ S_{BC} należy do symetralnej: $b=\frac{3}{2}$ $y=-\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}$ środek okręgu: $\begin{cases} y=-\frac{1}{4}x+\frac{3}{2} \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow S=\left(0;\frac{3}{2}\right)$ promień okręgu: $r=\lvert SA\rvert=\sqrt{(-1)^2+\left(-\frac{9}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{85}{4}}$ równanie okręgu: $x^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{85}{4}$	▪ błędy w rozwiązywaniu układu równań, ▪ niepoprawne wyznaczenie punktów (zamiana współrzędnych $x \leftrightarrow y$), ▪ wyznaczanie środka okręgu jako punktu przecięcia się przekątnych, ▪ błędy rachunkowe w obliczaniu długości promienia okręgu.

<table>
<tr><th colspan="2">**Zadanie 19.** (10 pkt)</th></tr>
<tr><td colspan="2">

Umiejętności sprawdzane zadaniem:
- wyznaczanie dziedziny funkcji wymiernej (w tym stosowanie wzorów Viète'a),
- obliczanie pochodnych wielomianów i funkcji wymiernych,
- stosowanie pochodnej do rozwiązywania zadań optymalizacyjnych.

</td></tr>
<tr><td>

Przykładowy uczniowski zapis rozwiązania:

$x^2+(m-5)x+m^2+m+\frac{1}{4}=0$

$\Delta=m^2-10m+25-4m^2-4m-1=-3m^2-14m+24$

$\Delta\ge 0 \Leftrightarrow m\in\left\langle -6;\frac{4}{3}\right\rangle$

$f(m)=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{-m+5}{m^2+m+\frac{1}{4}},\ m\ne -\frac{1}{2}$

$D_f=\left\langle -6;-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2};\frac{4}{3}\right\rangle$

$f'(m)=\frac{-\left(m^2+m+\frac{1}{4}\right)-(2m+1)(-m+5)}{\left(m^2+m+\frac{1}{4}\right)^2}=$

$=\frac{-m^2-m-\frac{1}{4}+2m^2-9m-5}{\left(m+\frac{1}{2}\right)^4}=\frac{m^2-10m-5\frac{1}{4}}{\left(m+\frac{1}{2}\right)^4}$

$f'(m)=0\Leftrightarrow m^2-10m-5\frac{1}{4}=0$

$\Leftrightarrow\left(m=-\frac{1}{2}\vee m=\frac{21}{2}\right)\wedge m\in\left\langle -6;-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2};\frac{4}{3}\right\rangle$

$\Leftrightarrow m\in\varnothing$

$f(-6)=\frac{4}{11}$

$f\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{12}{11}$

$y_{\min}=f(-6)=\frac{4}{11}$

</td><td>

Najczęściej powtarzające się błędy:

- brak określenia warunków istnienia pierwiastków,
- brak określenia dziedziny funkcji,
- błędy w wyznaczaniu pochodnej funkcji wymiernej,
- błędy w wyznaczaniu miejsca zerowego funkcji wymiernej,
- brak obliczenia wartości funkcji na końcach przedziału określoności,
- obliczanie ekstremum w punkcie nie należącym do dziedziny.

</td></tr>
</table>

Oceniane czynności		Liczba punktów	Standard wymagań	Łatwość czynności
19.1	Określenie warunków istnienia pierwiastków rzeczywistych równania	1	III.2.R	0,31
19.2	Określenie wzoru funkcji *f*	1	III.2.R	0,60
19.3	Określenie dziedziny funkcji *f*	1	III.2.R	0,15
19.4	Zastosowanie wzoru na pochodną funkcji	1	II.2.R	0,47
19.5	Obliczenie pochodnej funkcji	1	II.2.R	0,39
19.6	Określenie miejsca zerowego pochodnej	1	III.2.R	0,38
19.7	Obliczenie wartości $f(-6)$ i $f\left(\frac{4}{3}\right)$	2	III.2.R	0,05
19.8	Zbadanie znaku pochodnej	1	III.2.R	0,31
19.9	Uzasadnienie, że $f(-6)$ jest najmniejszą wartością funkcji	1	III.2.R	0,06

Komentarz

Zadanie okazało się dla zdających *trudne* (p=0,28). Maturzyści, którzy zdecydowali się rozwiązywać to zadanie i poprawnie określili funkcję *f* z reguły nie mieli problemów z obliczeniem pochodnej i jej zastosowaniem do rozwiązywania zadań optymalizacyjnych, zapominali jednak o określeniu dziedziny funkcji, co prowadziło do błędnych odpowiedzi.