

Jak obliczać podstawowe wskaźniki statystyczne?

Przeprowadzone egzaminy zewnętrzne dostarczają informacji o tym, jak uczniowie w poszczególnych latach opanowali umiejętności i wiadomości określone w standardach wymagań egzaminacyjnych.

Każda szkoła z informacją o wynikach egzaminu zewnętrznego zapoznawana jest poprzez *Raport* przygotowany w OKE Jaworzno, który zawiera wyniki uczniów piszących egzamin zewnętrzny w województwie śląskim, a także - zamieszczoną w *Załączniku* - charakterystykę osiągnięć uczniów danej szkoły.

Celem niniejszego opracowania jest opisanie wskaźników statystycznych pojawiających się w *Raporcie*, tak aby można było obliczać i interpretować je samodzielnie podczas analizowania wyników egzaminów i sprawdzianów wewnętrznych.

I. Wyniki dotyczące zestawu egzaminacyjnego

Na początek proponujemy porównanie wyników podstawowych (a więc wyników za zestaw egzaminacyjny) statystycznego ucznia w województwie śląskim z uczniem w SP nr 1 w Ogródzie (przykładowa szkoła) oraz w Państwa szkole. Przypominamy, że wyniki statystycznego ucznia to wyniki średnie dla danej zbiorowości.

Tabela 1. Wyniki sprawdzianu' 2003 uzyskane przez uczniów Szkoły Podstawowej nr 1 w Ogródzie

Kod	Nazwisko, imię	Miejsce urodzenia	Arkusz	Punkty za standardy					Wynik (x)
				1.	2.	3.	4.	5.	
A01	Bylica Krystyna	Ogród	A1	10	8	5	1	4	28
A02	Fasola Krzysztof	Łąka	A1	4	7	2	1	1	15
A03	Hiacynt Jerzy	Łąka	A1	8	7	4	2	6	27
A04	Jodła Agnieszka	Ogród	A1	4	10	5	2	4	25
A05	Klon Jan	Łąka	A1	5	8	3	1	0	17
A06	Konwalia Urszula	Łąka	A1	7	10	5	2	5	29
A07	Krokus Ryszard	Ogród	A1	9	12	6	2	7	36
A08	Malina Hanna	Ogród	A1	7	11	6	1	5	30
A09	Malwa Anita	Ogród	A1	6	9	7	2	4	28
A10	Mech Grzegorz	Ogród	A1	6	7	3	2	2	20
A11	Paproć Ewa	Ogród	A1	5	7	3	1	3	19
A12	Pelargonia Jadwiga	Ogród	A1	10	12	5	2	6	35
A13	Piwonia Barbara	Ogród	A1	7	11	7	2	5	32
A14	Rumianek Michał	Szklarnia	A1	6	9	4	1	5	25
A15	Sasanka Tomasz	Ogród	A1	9	12	7	2	8	38
A16	Stokrotka Anna	Ogród	A1	8	10	6	2	7	33
Razem				111	150	78	26	72	437

Tabela 2. Wyniki uzyskane przez statystycznego ucznia w 2003 r.

Wskaźniki	Województwo	Szkoła Podstawowa nr 1 w Ogrodzie	Moja szkoła
Liczba uczniów	61 004	16	
Łatwość zestawu	0,72	0,68	
Liczba punktów możliwa do zdobycia	40	40	40
Wynik najczęstszy (modalna – Mo)	33	-	
Wynik środkowy (mediana – Me)	30	28	
Wynik średni (średnia arytmetyczna) M)	28,9	27,3	
Odchylenie standardowe	6,69	6,64	
Wynik najwyższy uzyskany przez uczniów	40	38	
Wynik najniższy uzyskany przez uczniów	0	15	
Rozstęp	40	23	

Jak obliczyć łatwość zestawu egzaminacyjnego, wynik średni, wartość odchylenia standardowego? Jak wyznaczyć wynik najczęstszy, wynik środkowy i rozstęp wyników?

Łatwość zestawu zadań wyrażana jest za pomocą wskaźnika łatwości (p). Jest on stosunkiem sumy punktów uzyskanych za rozwiązanie zadań do liczby punktów możliwych do uzyskania. Wskaźnik łatwości przyjmuje wartości z przedziału 0-1.

$$p = \frac{\sum x}{nk}$$

p - wskaźnik łatwości

$\sum x$ - suma punktów uzyskanych za rozwiązane zadania

n - liczba piszących

k - maksymalna liczba punktów, którą uczniowie otrzymali za poprawne rozwiązanie wszystkich zadań

W SP nr 1 w Ogrodzie:

suma punktów uzyskanych za rozwiązane zadania wyniosła 437,

sprawdzian pisało 16 uczniów,

za poprawne rozwiązanie wszystkich zadań uczeń otrzymywał 40 punktów.

$$p = \frac{437}{16 \times 40} = \frac{437}{640} = 0,68$$

Łatwość zestawu dla uczniów w SP nr 1 w Ogrodzie wynosi 0,68.

Aby zinterpretować uzyskaną wartość należy skorzystać z poniższej tabeli.

Tabela 3. Stopnie opanowania umiejętności przez uczniów

Wartość wskaźnika łatwości	0,00 – 0,19	0,20 – 0,49	0,50 – 0,69	0,70 – 0,79	0,80 – 0,89	0,90 – 1,00
Interpretacja	bardzo trudne	trudne	umiarkowanie trudne	łatwe		bardzo łatwe
Stopień osiągnięć	bardzo niski	niski	niziej zadowalający	zadowalający	dobry	bardzo dobry

Egzamin zewnętrzny w 2003 r. w SP nr 1 w Ogrodzie był umiarkowanie trudny, co oznacza niziej zadowalający poziom osiągnięć. W skali województwa sprawdzian wypadł na poziomie zadowalającym (wskaźnik wyniósł 0,72). W ten sam sposób można policzyć łatwość testu w Państwa szkole.

Wynik średni (średnia arytmetyczna (M)) jest sumą wszystkich uzyskanych wyników podzieloną przez ich liczbę.

$$M = \frac{\sum x}{n}$$

M – wynik średni

$\sum x$ - suma uzyskanych wyników

n – liczba piszących (liczba wyników)

W SP nr 1 w Ogrodzie:

suma uzyskanych wyników wyniosła 437,

liczba piszących – 16.

$$M = \frac{437}{16} = 27,3$$

Wynik średni sprawdzianu' 2003 w SP nr 1 w Ogrodzie wynosi 27,3 punktu, dla województwa – 28,9 punktu, a ile wynosi w Państwa szkole?

Wynik najczęstszy (modalna (M_o)) jest wynikiem uzyskiwanym przez największą liczbą uczniów (jest wynikiem najbardziej typowym) dla danej zbiorowości.

W szkole w Ogrodzie nie można wskazać modalnej, gdyż spośród szesnastu uczniów, dwunastu uzyskało wyniki różne (każdy inny), wynik 25 punktów powtórzył się dwukrotnie, podobnie jak wynik 28 punktów. Wśród piszących sprawdzian w województwie śląskim najbardziej typowym okazał się wynik 33 punkty. Uzyskało go 3962 uczniów. Jaki wynik najczęściej uzyskiwali uczniowie w Państwa szkole?

Wynik środkowy (mediana (M_e)) jest wynikiem znajdującym się w środku rozkładu uporządkowanego w kolejności malejącej lub rosnącej o nieparzystej liczbie wyników, albo średnią arytmetyczną dwóch środkowych wyników, jeżeli ich liczba jest parzysta.

W SP nr 1 w Ogrodzie liczba wyników jest parzysta (16 uczniów). Ich rozkład uporządkowany rosnąco przedstawiamy poniżej:

15	17	19	20	25	25	27	28	28	29	30	32	33	35	36	38
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

$$\text{Mediana} = \frac{28 + 28}{2} = 28$$

Wynik środkowy w naszej przykładowej szkole wynosi 28 punktów, tzn. połowa uczniów uzyskała wynik wyższy od podanego.

Jeśli w szkole pisałyby nieparzysta liczba uczniów, to wynik środkowy należy wyznaczyć w sposób jak poniżej:

17	19	29	30	32	33	36
----	----	----	----	----	----	----

Wynik środkowy w przypadku tej szkoły wynosi 30 punktów. Ile wynosi wynik środkowy w Państwa szkole?

Rozstęp wyników (R) jest to różnica między najwyższym a najniższym wynikiem uzyskanym przez uczniów.

W SP nr 1 w Ogrodzie rozstęp wyników wynosi 23 punkty.

Wynik najwyższy (x_{\max}): 38 punktów,
Wynik najniższy (x_{\min}): 15 punktów.

$$R = x_{\max} - x_{\min}$$

$$23 = 38 - 15$$

Rozstęp łatwo odczytać z wykresu przedstawiającego rozkład punktów. Zamieszczony jest w *Załączniku*, jaki szkoła otrzymała wraz z *Raportem*.

Ten sam wykres można wykorzystać do ustalenia modalnej i mediany.

Proszę odszukać wyżej wspomniany wykres i odczytać z niego rozstęp wyników dla uczniów w Państwa szkole.

Odchylenie standardowe jest miarą zmienności (rozproszenia) wyników w stosunku do średniej arytmetycznej. Jeśli wyniki są mało rozproszone, to odchylenie standardowe przyjmuje niską wartość.

$$s = \sqrt{\frac{\sum (x - M)^2}{n}}$$

s – odchylenie standardowe

x – wynik piszącego

M – wynik średni

n - liczba piszących

Tabela 4. Wyniki sprawdzianu' 2003 uzyskane przez uczniów Szkoły Podstawowej nr 1 w Ogródzie

Kod	Nazwisko, imię	Miejsce urodzenia	Arkusz	Wynik (x)	x-M	(x-M) ²	
A01	Bylica Krystyna	Ogród	A1	28	28-27,3	(0,7) ²	0,49
A02	Fasola Krzysztof	Łąka	A1	15	15-27,3	(-12,3) ²	151,29
A03	Hiacynt Jerzy	Łąka	A1	27	27-27,3	(-0,3) ²	0,09
A04	Jodła Agnieszka	Ogród	A1	25	25-27,3	(-2,3) ²	5,29
A05	Klon Jan	Łąka	A1	17	17-27,3	(-10,3) ²	106,09
A06	Konwalia Urszula	Łąka	A1	29	29-27,3	(1,7) ²	2,89
A07	Krokus Ryszard	Ogród	A1	36	36-27,3	(8,7) ²	75,69
A08	Malina Hanna	Ogród	A1	30	30-27,3	(2,7) ²	7,29
A09	Malwa Anita	Ogród	A1	28	28-27,3	(0,7) ²	0,49
A10	Mech Grzegorz	Ogród	A1	20	20-27,3	(-7,3) ²	53,29
A11	Paproć Ewa	Ogród	A1	19	19-27,3	(-8,3) ²	68,89
A12	Pelargonja Jadwiga	Ogród	A1	35	35-27,3	(7,7) ²	59,29
A13	Piwonia Barbara	Ogród	A1	32	32-27,3	(4,7) ²	22,09
A14	Rumianek Michał	Szklarnia	A1	25	25-27,3	(-2,3) ²	5,29
A15	Sasanka Tomasz	Ogród	A1	38	38-27,3	(10,7) ²	114,49
A16	Stokrotka Anna	Ogród	A1	33	33-27,3	(5,7) ²	32,49
Razem				437			705,44

$$s = \sqrt{\frac{\sum (x - M)^2}{n}} = \sqrt{\frac{705,44}{16}} = \sqrt{44,09} = 6,64$$

Wartość odchylenia standardowego w SP nr 1 w Ogródzie wynosi 6,64 punktu i jest zbliżona do wartości odchylenia standardowego w województwie (6,69 punktu). Zachęcamy do obliczenia tej miary w Państwa szkole.

Wynik średni i odchylenie standardowe służą do wyznaczania przedziału wyników typowych dla danej grupy uczniów.

Długość przedziału wyników typowych wynosi:

$$M \pm s$$

$$M = 27,3$$

$$s = 6,64$$

27,3 ± 6,64 czyli od 20 do 33 punktów.

W przedziale wyników typowych swój rezultat uzyskało 10 uczniów, co stanowi 62,5% wszystkich piszących w przykładowej szkole. Jaki % uczniów w Państwa szkole uzyskało wyniki z przedziału wartości typowych? Proszę wyliczyć długość przedziału i % uczniów.

Teraz porównajmy wyniki podstawowe uzyskane w roku 2003 z uzyskanymi w 2002.

Tabela 5. Wyniki uzyskane przez statystycznego ucznia w 2002 i w 2003 r.

Wskaźniki	Szkoła Podstawowa nr 1 w Ogrodzie		Moja szkoła	
	2002 r.	2003 r.	2002 r.	2003 r.
Liczba uczniów	20	16		
Łatwość zestawu	0,68	0,68		
Liczba punktów możliwa do zdobycia	40	40	40	40
Wynik najczęstszy (modalna – Mo)	25	-		
Wynik środkowy (mediana – Me)	27	28		
Wynik średni (średnia arytmetyczna M)	27	27,3		
Odchylenie standardowe	3,51	6,64		
Wynik najwyższy uzyskany przez uczniów	33	38		
Wynik najniższy uzyskany przez uczniów	20	15		
Rozstęp	13	23		

W przykładowej szkole łatwość sprawdzianu na przestrzeni dwóch lat jest bardzo podobna i nieco niższa niż w województwie. Jak było w Państwa szkole?

II. Wyniki dotyczące osiągnięć w zakresie poszczególnych standardów

Tabela 6. Wskaźniki opisujące opanowanie standardów

Wskaźniki	Województwo	Szkoła Podstawowa nr 1 w Ogrodzie	Moja szkoła
Czytanie (1)			
Liczba punktów	10	10	10
Łatwość	0,78	0,69	
Wynik średni	7,6	6,9	
Odchylenie standardowe	1,93	1,89	
Pisanie (2)			
Liczba punktów	12	12	
Łatwość	0,77	0,78	
Wynik średni	8,8	9,4	
Odchylenie standardowe	2,35	1,83	
Rozumowanie (3)			
Liczba punktów	8	8	
Łatwość	0,68	0,61	
Wynik średni	5,4	4,9	
Odchylenie standardowe	2,03	1,54	
Korzystanie z informacji (4)			
Liczba punktów	2	2	
Łatwość	0,87	0,81	
Wynik średni	1,7	1,6	
Odchylenie standardowe	0,53	0,48	
Wykorzystywanie wiedzy w praktyce (5)			
Liczba punktów	8	8	
Łatwość	0,59	0,56	
Wynik średni	4,7	4,5	
Odchylenie standardowe	1,99	2,12	

Łatwość standardu 1 (czytanie) dla SP-1 w Ogrodzie oblicza się analogicznie, jak łatwość zestawu czyli według wzoru:

$$p = \frac{\sum x}{nk}$$

p - wskaźnik łatwości standardu

$\sum x$ - suma punktów uzyskanych za standard

n - liczba piszących

k - maksymalna liczba punktów, którą uczeń otrzymuje za standard

W SP nr 1 w Ogrodzie:

suma punktów uzyskanych za standard 1 (*czytanie*) wyniosła 111 – patrz tabela 1, sprawdzian pisało 16 uczniów, za poprawne rozwiązanie standardu 1. uczeń mógł otrzymać 10 punktów.

$$p = \frac{111}{16 \times 10} = \frac{111}{160} = 0,69$$

Łatwość standardu 1. dla statystycznego ucznia w SP nr 1 w Ogrodzie wynosi 0,69, w województwie – 0,78.

Wynik średni (średnia arytmetyczna (M)) dla standardu 1 oblicza się podobnie, jak średnią arytmetyczną dla zestawu.

$$M = \frac{\sum x}{n}$$

M – wynik średni dla standardu

$\sum x$ - suma uzyskanych wyników za standard 1

n – liczba piszących (liczba wyników)

W SP nr 1 w Ogrodzie:

suma uzyskanych wyników wyniosła 111,

liczba piszących – 16.

$$M = \frac{111}{16} = 6,9$$

Wynik średni za standard 1 w SP nr 1 w Ogrodzie wynosi 6,9 punktu, dla województwa – 7,6, a ile wynosi w Państwa szkole?

Do obliczenia **odchylenia standardowego** towarzyszącego średniej arytmetycznej standardu 1 wykorzystano wcześniej podany wzór:

$$s = \sqrt{\frac{\sum (x - M)^2}{n}}$$

s – odchylenie standardowe

x – wynik piszącego

M – wynik średni dla standardu

n - liczba piszących

Tabela 7. Wyniki za standard 1. uzyskane podczas sprawdzianu' 2003 przez uczniów Szkoły Podstawowej nr 1 w Ogrodzie

Kod	Nazwisko, imię	Miejsce urodzenia	Standard	Wynik (x)	x-M	(x-M) ²	
A01	Stokrotka Anna	Ogród	1	10	10 – 6,9	(3,1) ²	9,61
A02	Malwa Anita	Łąka	1	4	4 – 6,9	(-2,9) ²	8,41
A03	Paproć Ewa	Łąka	1	8	8 – 6,9	(1,1) ²	1,21
A04	Krokus Ryszard	Ogród	1	4	4 – 6,9	(-2,9) ²	8,41
A05	Bylica Krystyna	Łąka	1	5	5 – 6,9	(-1,9) ²	3,61
A06	Klon Jan	Łąka	1	7	7 – 6,9	(0,1) ²	0,01
A07	Malina Hanna	Ogród	1	9	9 – 6,9	(2,1) ²	4,41
A08	Fasola Krzysztof	Ogród	1	7	7 – 6,9	(0,1) ²	0,01
A09	Mech Grzegorz	Ogród	1	6	6 – 6,9	(-0,9) ²	0,81
A10	Jodła Agnieszka	Ogród	1	6	6 – 6,9	(-0,9) ²	0,81
A11	Rumianek Michał	Ogród	1	5	5 – 6,9	(-1,9) ²	3,61
A12	Sasanka Tomasz	Ogród	1	10	10 – 6,9	(3,1) ²	9,61
A13	Hiacynt Jerzy	Ogród	1	7	7 – 6,9	(0,1) ²	0,01
A14	Piwonia Barbara	Szklarnia	1	6	6 – 6,9	(-0,9) ²	0,81
A15	Pelargonja Jadwiga	Ogród	1	9	9 – 6,9	(2,1) ²	4,41
A16	Konwalia Urszula	Ogród	1	8	8 – 6,9	(1,1) ²	1,21
				Razem	111	56,96	

$$s = \sqrt{\frac{\sum (x - M)^2}{n}} = \sqrt{\frac{56,96}{16}} = \sqrt{3,56} = 1,89$$

Wartość odchylenia standardowego w SP nr 1 w Ogrodzie wynosi 1,89 punktu i jest zbliżona do wartości odchylenia standardowego w województwie (1,93 punktu). Zachęcamy do obliczenia tej miary w Państwa szkole.

Wskaźniki dla pozostałych standardów oblicza się analogicznie, jak dla standardu 1. Mamy nadzieję, że zamieszczone wyżej wskazówki zachęcą do uzupełnienia tabeli 6. i tym samym do obliczenia wartości średniej arytmetycznej i towarzyszącego jej odchylenia standardowego.

Oprócz łatwości, średniej arytmetycznej i odchylenia standardowego w obrębie każdego standardu można w bardzo prosty sposób wyznaczyć modalną, medianę i rozstęp. Wystarczy uzyskane przez uczniów liczby punktów przedstawić jak poniżej:

			6	7					
4	5	6	7	8	9	10			
4	5	6	7	8	9	10			

Na przedstawionym rozkładzie można zauważyć, że dwóch uczniów uzyskało po 4 punkty, dwóch po 5 punktów, trzech po 6 punktów itd., widać również brak wyniku najczęstszego czyli modalnej, natomiast wynik środkowy (mediana) łatwo ustalić licząc średnią arytmetyczną dwóch środkowych wartości (liczba wyników jest parzysta) czyli wyniku ósmego i dziewiątego:

$$\text{Mediana} = \frac{7+7}{2} = 7$$

W SP nr 1 w Ogrodzie najniższy uzyskany wynik wynosi 4, a najwyższy 10 punktów, stąd rozstęp wynosi 6 punktów. Ilustruje to poniższy zapis:

$$R = x_{\max} - x_{\min}$$

$$6 = 10 - 4$$

Analiza wyliczonych wskaźników na pewno wyzwoli w uczących refleksję co do jakości prowadzonych zajęć dydaktycznych. Aby była ona głębsza, warto porównać wyniki w obszarze standardów w roku 2003 z wynikami 2002.

Tabela 8. Porównanie poziomu opanowania standardów

Wskaźniki	Szkoła Podstawowa nr 1 w Ogrodzie		Moja szkoła	
	2002	2003	2002	2003
Czytanie (1)				
Liczba punktów	10	10	10	10
Łatwość	0,73	0,69		
Wynik średni	7,3	6,9		
Odchylenie standardowe	1,31	1,89		
Pisanie (2)				
Liczba punktów	12	12	12	12
Łatwość	0,70	0,78		
Wynik średni	8,4	9,4		
Odchylenie standardowe	2,01	1,83		
Rozumowanie (3)				
Liczba punktów	8	8	8	8
Łatwość	0,71	0,61		
Wynik średni	5,7	4,9		
Odchylenie standardowe	1,52	1,54		
Korzystanie z informacji (4)				
Liczba punktów	2	2	2	2
Łatwość	0,75	0,81		
Wynik średni	1,5	1,6		
Odchylenie standardowe	0,67	0,48		
Wykorzystywanie wiedzy w praktyce (5)				
Liczba punktów	8	8	8	8
Łatwość	0,51	0,56		
Wynik średni	4,1	4,5		
Odchylenie standardowe	1,37	2,12		

Pomimo, że stopień trudności sprawdzianu w 2002 i 2003 roku w SP-1 w Ogrodzie był taki sam, to widoczne są różnice w opanowaniu standardów. Powyższe dane są niewystarczające do oceny dotychczasowego nauczania w tej szkole. Konieczne jest dokonywanie po każdym kolejnym sprawdzianie porównań, gdyż z czasem staną się one źródłem informacji dla nauczycieli, o tym jakie podejmować działania dydaktyczne, by proces nauczania-uczenia się uczynić bardziej trafnym i efektywnym.